

Geogebra como herramienta tecnológica-didáctica en el aprendizaje del cálculo integral

Geogebra as a technological-didactic tool in learning integral calculus

Geogebra como ferramenta didático-tecnológica no aprendizado do cálculo integral

Marco Vinicio Navarrete-Villavicencio

marco.navarrete@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-0520-6089>

Patricio Alejandro Merino-Córdova

patricio.merino@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0001-5068-8673>

Byron Fabricio Estupiñán-Cox

byron.estupinan@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0001-6523-667X>

Javier Antonio Caicedo-Márquez

javier.caicedo.marquez@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-4254-2516>

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza una revisión bibliográfica sobre el uso del software Geogebra como herramienta tecnológica-didáctica en el aprendizaje de matemáticas, de manera central en el campo de Cálculo Integral. La metodología aplicada fue de tipo cualitativa ya que se recogen y analizan datos de variables a manera de redacción o no cuantificable. Se realizó un estudio de tipo documental de carácter descriptivo a través de Google Académico; Dialnet y Redalyc. En este proceso se han encontrado 13 artículos que presentan el uso de tecnología para el aprendizaje de matemáticas, como resultado de este estudio arroja que el uso del Geogebra ayuda de manera sustancial a la resolución de problemas y es una herramienta para utilizar como estrategia en el aprendizaje del cálculo integral. Finalmente, el software Geogebra brinda apoyo de manera dinámica en el estudio de cálculo de áreas bajo curvas generadas por funciones, así como de área entre curvas, sólidos propuestos en revolución partiendo de una función o varias funciones y un eje de rotación, de igual manera para el cálculo de longitudes de arcos de curvas planas y/o rectangulares, teniendo en cuenta que se puede realizar el cálculo analítico y representación gráfica de cada problema. Se concluye que el software Geogebra ayuda por sobre manera en el aprendizaje de cálculo diferencial ya que por medio de los estudiantes desarrollan nuevos conceptos y crean nuevos conocimientos, por medio del desarrollo de gráficos en dos dimensiones, tres dimensiones dinámico y cálculo analítico.

Palabras Clave: Geogebra, Aprendizaje, Cálculo Integral, Matemáticas.

ABSTRACT

In the present work, a bibliographic review is carried out on the use of Geogebra software as a technological-didactic tool in the learning of mathematics, centrally in the field of Integral Calculus. The methodology applied was of a qualitative type since variable data is collected and analyzed in a written or non-quantifiable way. A descriptive documentary study was carried out through Google Scholar; Dialnet and Redalyc. In this process, 13 articles have been found that present the use of technology for learning mathematics, as a result of this study it shows that the use of Geogebra helps substantially to solve problems and is a tool to use as a strategy in the integral calculus learning. Finally, the Geogebra software provides dynamic support in the study of calculating areas under curves generated by functions, as well as the area between curves, proposed solids in revolution starting from a function or several functions and a rotation axis, in the same way. for the calculation of arc lengths of plane and/or rectangular curves, taking into account that the analytical calculation and graphical representation of each problem can be carried out. It is concluded that the Geogebra software helps above all in the learning of differential calculus since through the students they develop new concepts and create new knowledge, through the development of two-dimensional graphics, three-dimensional dynamics and analytical calculation.

Keywords: Geogebra, Learning, Integral Calculus, Mathematics.

RESUMO

No presente trabalho, é realizada uma revisão bibliográfica sobre o uso do software Geogebra como ferramenta didático-tecnológica na aprendizagem da matemática, centralmente na área de Cálculo Integral. A metodologia aplicada foi de tipo qualitativo uma vez que os dados variáveis são recolhidos e analisados de forma escrita ou não quantificável.

Foi realizado um estudo documental descritivo por meio do Google Acadêmico; Dialnet e Redalyc. Nesse processo, foram encontrados 13 artigos que apresentam o uso da tecnologia para o aprendizado da matemática, como resultado deste estudo mostra que o uso do Geogebra auxilia substancialmente na resolução de problemas e é uma ferramenta a ser utilizada como estratégia no cálculo integral. Por fim, o software Geogebra fornece suporte dinâmico no estudo de cálculo de áreas sob curvas geradas por funções, bem como a área entre curvas, sólidos propostos em revolução a partir de uma função ou várias funções e um eixo de rotação, da mesma forma. o cálculo de comprimentos de arco de curvas planas e/ou retangulares, levando em consideração que o cálculo analítico e a representação gráfica de cada problema podem ser realizados. Conclui-se que o software Geogebra auxilia sobretudo na aprendizagem do cálculo diferencial, pois através dos alunos eles desenvolvem novos conceitos e criam novos conhecimentos, através do desenvolvimento de gráficos bidimensionais, dinâmicas tridimensionais e cálculo analítico.

Palavras-chave: Geogebra, Aprendizagem, Cálculo Integral, Matemática.

INTRODUCCIÓN

El trabajo innovador de las personas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas ha descargado en el uso de la tecnología como herramienta afianzadora del conocimiento, desarrollando capacidades destinadas al desarrollo del pensamiento crítico e induciendo a la mejora de sus destrezas para el aprendizaje del cálculo integral.

En este artículo se investiga sobre el uso de los recursos tecnológicos y programas informáticos de: graficación y soluciones algebraicas de integrales definidas e indefinidas y su ayuda para mejorar sistemáticamente la enseñanza del Cálculo Integral, en los cuales se explica en primer lugar un aprendizaje significativo y en segundo lugar el conocimiento se lo relaciona con los posibles problemas a resolver en la sociedad.

Dentro de las soluciones algebraicas se detalla que los estudiantes estarán en la capacidad de desarrollar algebraicamente las integrales definidas e indefinidas, así como su campo amplio de aplicación como son el área bajo la curva generada por una o más funciones, cálculo del volumen de un sólido dispuesto en revolución partiendo de una función y un eje de rotación y la determinación de las longitudes de arcos de curvas planas y rectangulares.

Molina Mora (2015); indica que la tecnología no sustituye lo que se debe enseñar y aprender, es decir que, la tecnología es una herramienta muy útil para el desarrollo de las integrales ya sean estas definidas o indefinidas ya que sin estas habrían casos muy difíciles de resolver. Sin dejar de lado los paradigmas que se deben seguir para poder explicar y comprender de manera lógica el desarrollo de los problemas.

Jacinto y Carreira (2018) recalcan el uso de la tecnología en la frase “un gran a gusto de estos jóvenes, todo el mundo crea dibujos, explora propiedades, visualiza y reconoce patrones. En el cual se recalca el uso de una herramienta tecnológica como es el programa GEOGEBRA, mediante el cual los estudiantes pueden experimentar, resolver o expresar acciones que, de alguna manera son incomparables. Para lo cual es necesario proponer un estudio mixto en el cual se debe tomar en cuenta de manera primordial el estudio de procesos matemáticos para luego incluir los programas para “facilitar” su desarrollo, ya que simplemente realizar el cálculo con ayuda de tecnología dejaría de lado el objeto de estudio.

Ballesteros, Lozano y Rodríguez (2020) expresan que las herramientas tecnológicas también se utilizan para dar a los estudiantes nuevas formas de visualizar conceptos y abordar problemas de forma dinámica.

El objetivo de este artículo es mostrar que utilizar la aplicación Geogebra como herramienta didáctica-tecnológica en los estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica durante el estudio de la materia de Cálculo Integral mejora su aprendizaje significativo.

Metodología

Este es un estudio de revisión bibliográfica, se utiliza la metodología cualitativa ya que se recogen y analizan datos de variables a manera de redacción o no cuantificable. Se realizó un estudio de tipo documental de carácter descriptivo.

La búsqueda de la información se la ejecuta mediante el estado del arte para recolectar la información de 13 artículos relacionados al tema que están publicados en revistas y encontrados mediante Google Scholar, para esta búsqueda se ha utilizado el nombre del artículo, las palabras claves y filtro de fechas e idiomas, por último, se realiza la gestión de esa información.

Se utiliza el método deductivo para la realizar la gestión de la información y sacar conclusiones de los artículos investigados.

DESARROLLO

EL GEOGEBRA Y SUS BONDADES

Geogebra

Al empezar un estudio de un software libre, primero se debe entender lo que es un Recurso Educativo Abierto, para lo cual Rubio (2020):

Cualquier recurso educativo (incluso mapas curriculares, materiales de curso, libros de estudio, streaming de videos, aplicaciones multimedia, podcasts y cualquier material que haya sido diseñado para la enseñanza y el aprendizaje) que esté plenamente disponible para ser usado por educadores y estudiantes, sin que haya necesidad de pagar regalías o derechos de licencia (p. 4)

Ruiz (2018) opina que “las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático”. Esta afirmación es incuestionable cuando se completa al sistema educativo softwares o programas informáticos, logrando ver desde otro punto de vista o perspectiva los objetivos del estudio de matemática.

Geogebra es un software multididáctico que apoya a los estudiantes a aprender de manera interactiva, relación a este estudio ayuda a ejercitarse de manera práctica y facilita diversos tipos de cálculos.

Barahona at al (2015) La herramienta Geogebra facilita procesos de abstracción para mostrar cómo se construye una relación entre un modelo geométrico y un modelo algebraico de una situación de la vida real.

GeoGebra es el software que proporciona una excelente opción para mejorar la actividad central de las matemáticas en la resolución de problemas y es una herramienta adecuada para utilizar como estrategia en la enseñanza de las ciencias exactas (Jiménez García & Jiménez Izquierdo, 2017).

El software geogebra es de gran importancia en el desarrollo del pensamiento crítico y proposicional. Según Aldazabal Melgar at al (2021):

El uso del software GeoGebra representó una excelente opción para la mejora de las habilidades resolutorias de problemas vinculados con figuras geométricas bidimensionales en la asignatura de matemáticas para estudiantes universitarios del primer año de la carrera profesional de educación, brindando la oportunidad de desarrollar estrategias de trabajo colaborativo, integración socio estudiantil y mejora del clima de clase en un contexto de interacción académica remota. Se recomienda el empleo de esta herramienta, aunque podría

ampliarse con la combinación de otras aplicaciones más que facilitarían el proceso de enseñanza aprendizaje. (pp. 9 – 10)

Interfaz:

La interfaz de geogebra presenta varias vistas entre las cuales se distinguen para el uso de ingeniería ya que cuenta con una vista algebraica en la cual mediante la entrada y comandos ya establecidos por el programa se pueden realizar cálculos matemáticos y físicos; de igual manera cuenta con una vista gráfica 2D en la cual se va detallando cualquier tipo de gráficos partiendo de las ecuaciones, inecuaciones o cualquier ejercicio matemático que se esté realizando en la vista algébrica; de igual manera en la vista gráfica 3D se va creando de manera espacial (tres planos) para luego crear un objeto macizo partiendo de rectas de funciones.

Esta se divide en varias zonas:

- En su parte superior está la barra de menús y barra de herramientas.
- En el centro se encuentra las vistas tanto algebraicas, gráficas en 2D-3D y hoja de cálculo.
- En la parte inferior se encuentra campos de entrada, el cuadro de símbolos y la ayuda de entrada.

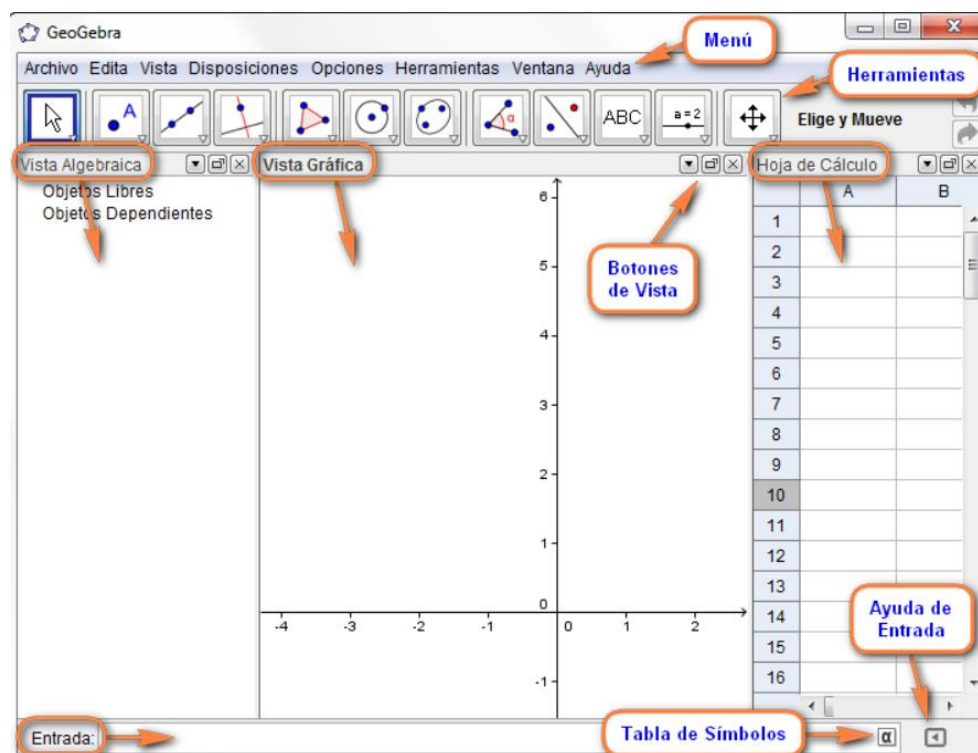


Figura1. Interfaz del Software Geogebra

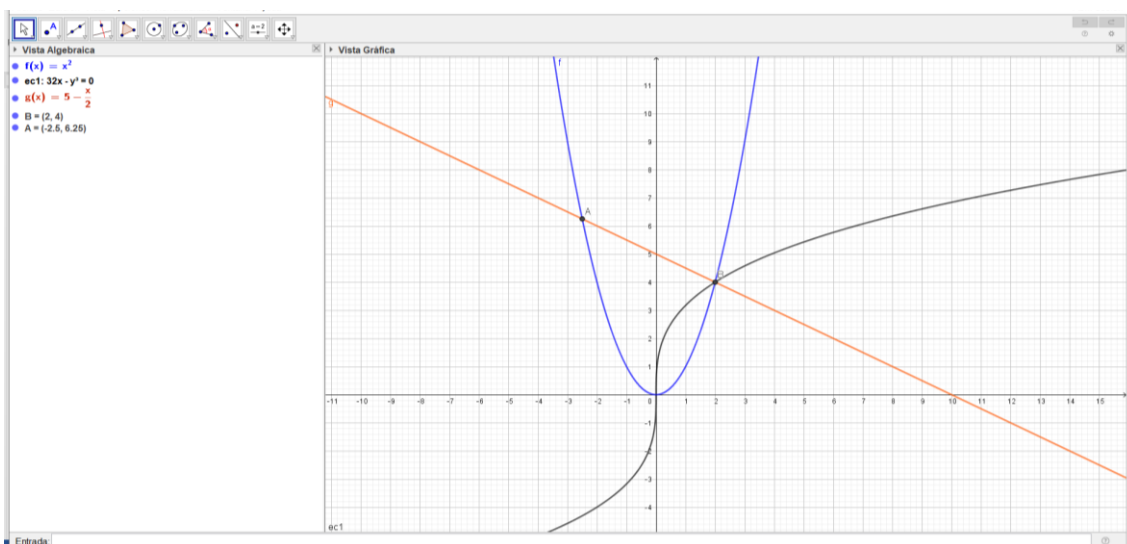


Figura 2. Vista Algebraica y Vista Gráfica 2D

En la Figura 2. se ejemplifica la forma de utilizar las vistas algebraica y vista gráfica 2D para realizar cálculos matemáticos como pendiente de una recta y/o distancia entre dos puntos.

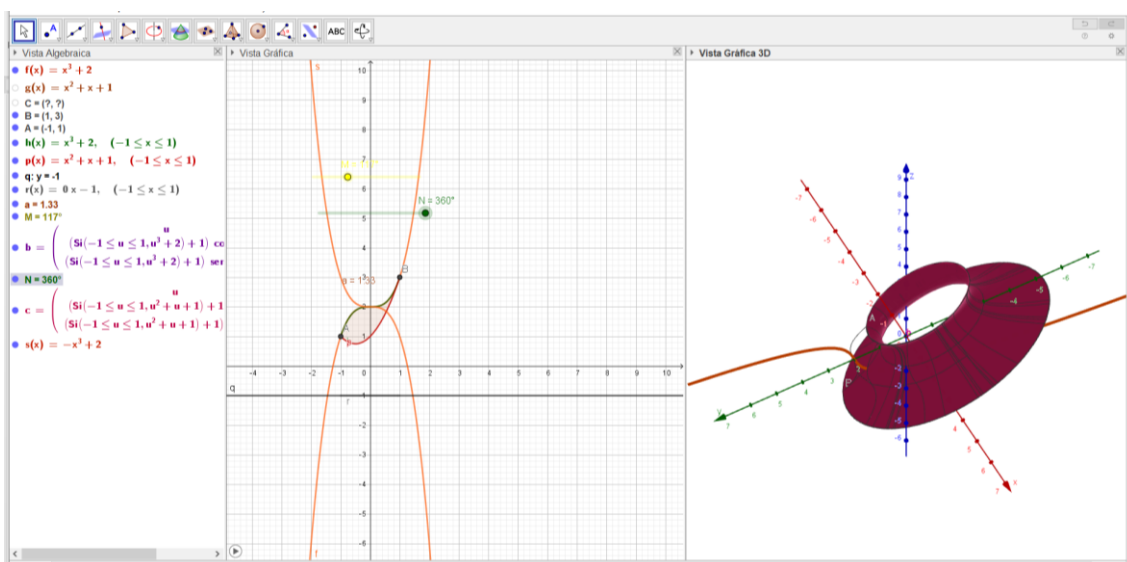


Figura 3. Vista Algebraica – Vista Gráfica 2D – Vista Gráfica 3D

En la figura 3. se ejemplifica la forma de utilizar las vistas algebraica, vista gráfica 2D y vista gráfica 3D para realizar cálculos matemáticos como pendiente de una recta y/o distancia entre dos puntos, de igual manera poder apreciar en la 2D las líneas que luego serán pasadas a la vista en 3D formando el tridimensional.

APRENDIZAJE DE CÁLCULO INTEGRAL

El cálculo integral estudia las integrales y sus aplicaciones a los diferentes campos de la ciencia, para la solución de los diversos problemas en la vida profesional.

Mateus-Nieves y Hernández (2020) establecieron que:

La integral dejó de ser sólo un operador, una herramienta (unitario), para resolver el problema general del cálculo de cuadraturas, convirtiéndose en un nuevo concepto con sus propios problemas y métodos (sistémico), lo que nos permite identificar ahora, otro significado que podríamos llamar “emergente” que puede interpretarse como “intermedio”, ya no para el operador integral, sino para el naciente cálculo integral (p 200).

Bautista y Shingareva (2017) la solución de integrales se lleva a cabo utilizando una colección de estrategias y casos especiales, y en realidad estos pueden usarse solo en subconjuntos defunciones, para combinaciones finitas de funciones (excepto de la adición) no hay reglas simples (p.77).

En sí el cálculo integral se divide en dos partes, integrales indefinidas e integrales definidas. En su primera parte se desarrollan ejercicios, integrales definidas, partiendo de fórmulas aplicables según los métodos correspondientes. Los métodos más aplicados son: integrales inmediatas, integrales de diferenciales trigonométricas, integrales por sustitución trigonométrica e integración por partes.

Las integrales inmediatas son aquellas cuya solución son directas y solo basta con la aplicación de fórmulas para su solución, en algunos casos se deben realizar operaciones algebraicas para aplicar las fórmulas inmediatas; las integrales de diferenciales trigonométricas se solucionan considerando las integrales trigonométricas o bien, formas trigonométricas reducibles a fórmulas establecidas; existen algunas integrales que contienen expresiones de las formas: $a^2 - x^2$; $a^2 + x^2$; $a^2 - x^2$ las cuales no tienen una solución directa, pero resultan sencillas si realiza una sustitución trigonométrica, por ejemplo si la expresión es $a^2 - x^2$, la sustitución que se debe realizar es $x = a \operatorname{sen} \theta$, si la expresión es $a^2 + x^2$, la sustitución que se debe realizar es $x = a \operatorname{sec} \theta$; las integrales en las cuales se tiene el producto de dos funciones se realiza por el método de integración por partes, para lo cual se utiliza la relación $\int u \, dv = uv - \int v \, du$, donde se debe escoger entre las dos funciones dadas cual corresponde a u y cual corresponde a dv , para esto es útil la identificación ILATE, en ese orden para las funciones Inversas, Logarítmicas, Algebraicas, Trigonómicas y Exponenciales. En el siguiente cuadro se detallan las fórmulas de integración más utilizadas.

1. $\int du = u + c$	10. $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + c$
2. $\int a \, du = a \int du$	11. $\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{co} \operatorname{tg} u + c$
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$	12. $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + c$
4. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c (n \neq -1)$	13. $\int \operatorname{co} \operatorname{sec} u \operatorname{co} \operatorname{tg} u \, du = -\operatorname{co} \operatorname{sec} u + c$
5. $\int \frac{du}{u} = \ell \eta u + c$	14. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + c$
6. $\int e^u \, du = e^u + c$	15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{arc} \operatorname{cos} u + c$
7. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ell \eta a} + c$	16. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u + c$
8. $\int \operatorname{cos} u \, du = \operatorname{sen} u + c$	17. $\int \frac{du}{1+u^2} = -\operatorname{arc} \operatorname{co} \operatorname{tg} u + c$
9. $\int \operatorname{sen} u \, du = -\operatorname{cos} u + c$	18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{sec} u + c; u > 0 \\ -\operatorname{arc} \operatorname{sec} u + c; u < 0 \end{cases}$
	19. $\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} -\operatorname{arc} \operatorname{co} \operatorname{sec} u + c; u > 0 \\ \operatorname{arc} \operatorname{co} \operatorname{sec} u + c; u < 0 \end{cases}$

Figura 4. Fórmulas de Integrales

GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA TECNOLÓGICA-DIDÁCTICA EN EL CÁLCULO INTEGRAL

El estudio del cálculo integral con el software Geogebra como herramienta tecnológica didáctica ayuda de manera efectiva en el desarrollo de las competencias y fortalecimiento del aprendizaje significativo en los estudiantes.

El buen uso software geogebra tiene muchas ventajas, tal cual como lo detalla Villalobos at al (2017):

Permite al profesor explicar conceptos que, de otra forma, quedarían en un nivel de abstracción difícil de asimilar por muchos estudiantes en un tiempo breve; permite una participación mucho más activa y creativa por parte del estudiante ya que puede experimentar a su gusto (de forma guiada o no por su profesor) lo cual le permite obtener conjeturas y extraer conclusiones. Esto abre a cualquier estudiante con mínimos conocimientos informáticos toda una gama de posibilidades para su aprendizaje (pp.138 - 139).

Villalobos at al (2017) no dice que los profesores deben adaptar su metodología a esta herramienta, a pesar de las dificultades que implica poner en práctica cualquier propuesta de innovación, tanto en cuestiones metodológicas como curriculares, en cualquiera de los niveles de enseñanza.

Clavijo at al (2019) en su investigación indica que los estudiantes tenían un mejor desempeño académico cuando se trabajaba con medios tecnológicos para la modelización y dinamización de las actividades propuestas en las clases.

b) $y = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ $3(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) = x^3 - 2x^2 - 15x$
 $3y = x^3 - 2x^2 - 15x$ $3x^3 - 12x^2 - 33x + 90 = x^3 - 2x^2 - 15x$
 $2x^3 - 10x^2 - 18x + 90 = 0$
 $x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = 0$
 $x^2(x-5) - 9(x-5) = 0$
 $(x^2-9)(x-5) = 0$
 $x_1 = -3 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 5$

$\int (2x^3 - 10x^2 - 18x + 90) dx$
 $\left. \frac{x^4}{2} - \frac{10x^3}{3} - 9x^2 + 90x \right|_{-3}^5$

$A_1 = \left| \left[\frac{(5)^4}{2} - \frac{10(5)^3}{3} - 9(5)^2 + 90(5) \right] - \left[\frac{(-3)^4}{2} - \frac{10(-3)^3}{3} - 9(-3)^2 + 90(-3) \right] \right|$
 $A_1 = |120,84 - 139,5|$
 $A_1 = 18,66 \mu^2$

$A_2 = \left| \left[139,5 \right] - \left[\frac{(-3)^4}{2} - \frac{10(-3)^3}{3} - 9(-3)^2 + 90(-3) \right] \right|$
 $A_2 = |139,5 + 220,5|$
 $A_2 = 360 \mu^2$

$A_T = (18,66 + 360) \mu^2$

Figura 5. Cálculo de Área forma Analítica

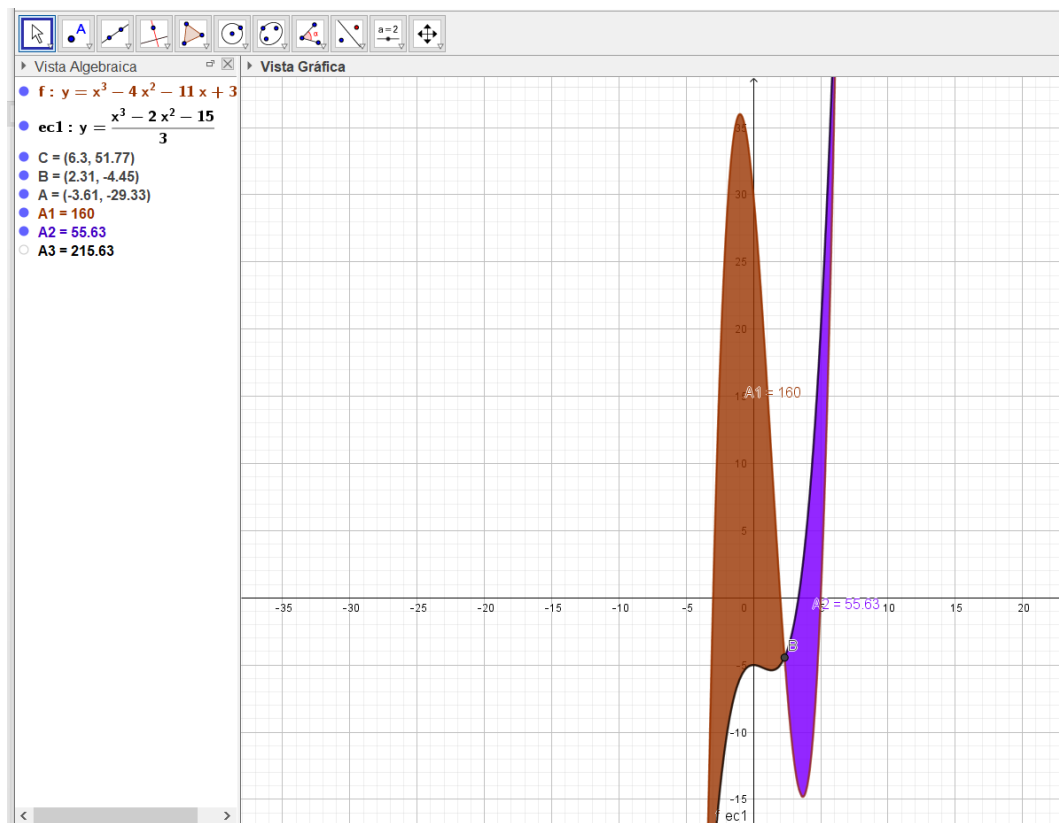


Figura 6. Cálculo de Área Bajo la Curva con Geogebra

DISCUSIÓN

En esta investigación de revisión bibliográfica se hace muy evidente la efectividad del uso del geogebra como herramienta didáctica-tecnológica para el aprendizaje de cálculo integral, ya que se logra una mejor captación por parte de los estudiantes para el desarrollo del conocimiento, ligando los ejercicios de integrales definidas con problemas del día a día.

El software Geogebra apoyo de manera dinámica en el estudio de cálculo de áreas bajo curvas generadas por funciones, así como de área entre curvas, sólidos propuestos en revolución partiendo de una función o varias funciones y un eje de rotación, de igual manera para el cálculo de longitudes de arcos de curvas planas y/o rectangulares, teniendo en cuenta que se puede realizar el cálculo analítico y representación gráfica de cada problema.

Conclusiones

En el estudio de 13 artículos originarios de la búsqueda en el Google académico se da a conocer varias explicaciones relacionadas al estudio del uso de geogebra como herramienta didáctica-tecnológica en el aprendizaje de cálculo integral. La tecnología desde hace varios años atrás ha venido siendo una herramienta importante en el desarrollo del conocimiento en todos los niveles, tanto el docente como los estudiantes se deben apoyar en herramientas tecnológicas para que el aprendizaje sea más significativo.

El software geogebra ayuda por sobre manera en el aprendizaje de cálculo diferencial ya que por medio de los estudiantes desarrollan nuevos conceptos y crean nuevos conocimientos, por medio del desarrollo de gráficos en dos dimensiones, tres dimensiones dinámico y cálculo analítico. En ese sentido, recomendamos nuevas investigaciones empíricas en diferentes contextos con el uso de software para confirmar y validar con mayor precisión las consideraciones expuestas en esta investigación.

Bibliografía

- Aldazabal Melgar, O. F., Vértiz Osoreo, R. I., Zorrila Tarazona, E., Aldazabal Melgar, L. H., & Guevara Duarez, M. F. (2021). Software GeoGebra en la mejora de capacidades resolutorias de problemas de figuras geométricas bidimensionales en universitarios. *Scielo*.
- Balesteros, A., Lozano, S., & Rodríguez, Ó. (2020). Noción de aproximación del área bajo la curva utilizando la aplicación calculadora gráfica de Geogebra. *Praxis & Saber*.
- Barahona AVECILLA, F., Becerra Cárdenas, O., Vaca Barahona, B., & Hidalgo Ponce, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL*, 122-123.
- Bautista Sanchez, P. M., & Shingareva, I. (2017). Aproximación analítica de integrales que contienen parámetros. *SAHUARUS Revista Electrónica de Matemáticas*, 77.
- Clavijo Gañan, E. E., Bedoya Sanchez, J. P., & Ramírez Machado, E. (2019). Visualización gráfica con Geogebra en el aprendizaje de cálculo. *Revista Scielo*.
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2018). Diferentes formas de utilizar geogebra en la resolución de problemas matemáticos más allá del aula: evidencia de fluidez tecno-matemática. *Scielo*.
- Jiménez García, J. G., & Jiménez Izquierdo, S. (2017). Geogebra, una propuesta para innovar el proceso de enseñanza aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad*, 4(7).
- Mateus-Nieves, E., & Hernández Montañez, W. (2020). Significado Global de la Integral Articulando su Complejidad Epistémica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*.
- Molina Mora, J. A. (2015). Experiencia basada en la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado para la *Uniciencia*.
- RAMÍREZ, J. E. (2018). *LA INTEGRACIÓN DE GEOGEBRA EN EL DESARROLLO DEL CARÁCTER*. Obtenido de Universidad Externado de Colombia: <https://bdigital.uexternado.edu.co/handle/001/906>
- Rubio-Pizzorno, S. (2020). Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista del Instituto Geogebra Internacional de Sao Paulo*.
- Stegman, C., Pérez, A., Prat, M., & Juan, A. (s.f.). Math-elearning@cat: factores claves del uso de las TICs en educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.
- Villalobos Oliver, E. B., Meléndez Aguilar, M. P., Sosa Pizano, I., Cerritos Carapia, L. Á., & Mendoza Jiménez, M. (2017). El uso de GeoGebra para solución numérica de integrales como una aplicación para el cálculo de la longitud de arco. *Revista Pistas Educativas*.