

Diseño óptimo de un controlador LQG para un sistema mecánico de un péndulo invertido

Optimal design of an LQG controller for an inverted pendulum mechanical system

Projeto ótimo de um controlador LQG para um sistema mecânico de pêndulo invertido

Ismael Elías Erazo-Velasco

ismael.erazo@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-7647-4611>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador

José Vicencio Bautista-Sánchez

jose.bautista@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-3358-1908>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador

Roberto Iván Rodríguez-Jijón

roberto.rodriguez@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-1055-7921>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador

Luis Adrián González-Quiñonez

luis.gonzalez@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0001-5026-0028>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador

RESUMEN

El objetivo de este trabajo consistió diseñar un controlador cuadrático lineal para un sistema con un péndulo invertido en un robot móvil. Se describe la investigación de tipo cuantitativa, con diseño de un estudio no experimental de tipo transeccional descriptivo. Con apoyo de una indagación documental. Para el desarrollo operativo de esta investigación, se realizó un estudio de simulación en el entorno MATLAB/Simulink. Los resultados obtenidos muestran que tanto LQR como LQG son capaces de controlar el éxito de este sistema completamente. Se concluye que mediante la manipulación adecuada de las ponderaciones de estado/control y las matrices de covarianza de ruido, tanto LQR como LQG darán un resultado satisfactorio.

Palabras claves: Péndulo invertido, ecuaciones de Lagrange, control cuadrático lineal LQR, filtro Kalman y control cuadrático gaussiano LQG.

ABSTRACT

The objective of this work was to design a linear quadratic controller for a system with an inverted pendulum in a mobile robot. Quantitative type research is described, with a non-experimental descriptive transeccional study design. With the support of a documentary investigation. For the operational development of this research, a simulation study was carried out in the MATLAB Simulink environment. The results obtained show that both LQR and LQG are able to control the success of this system completely. It is concluded that by proper manipulation of the state/control weights and the noise covariance matrices, both LQR and LQG will give a satisfactory result.

Keywords: Inverted pendulum, Lagrange equations, LQR linear quadratic control, Kalman filter and LQG Gaussian quadratic control.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi projetar um controlador quadrático linear para um sistema com pêndulo invertido em um robô móvel. Descreve-se uma pesquisa do tipo quantitativo, com um desenho de estudo transversal descritivo não experimental. Com o apoio de uma investigação documental. Para o desenvolvimento operacional desta pesquisa, foi realizado um estudo de simulação no ambiente MATLAB Simulink. Os resultados obtidos mostram que tanto o LQR quanto o LQG são capazes de controlar completamente o sucesso deste sistema. Conclui-se que pela manipulação adequada dos pesos de estado/controlado e das matrizes de covariância de ruído, tanto LQR quanto LQG darão um resultado satisfatório.

Palavras-chave: Péndulo invertido, equações de Lagrange, controle quadrático linear LQR, filtro de Kalman e controle quadrático gaussiano LQG.

Introducción

Hoy por hoy, el desarrollo tecnológico ha proporcionado diversas herramientas para avanzar en varios campos del conocimiento, uno de ellos es la ingeniería de control y particularmente lo que tiene que ver con los péndulos invertidos, a decir de (Patete, Aguirre, & Sánchez, 2011) los péndulos invertidos constituyen un banco de pruebas completo e interesante para la este campo ingenieril. Así, el péndulo invertido constituye uno de los sistemas no lineales más utilizados para la experimentación de diferentes estrategias de control (Triviño, 2020). El mecanismo del péndulo invertido ha sido ampliamente estudiado por la industria aeroespacial, dado que representa uno de los sistemas clásicos más conocidos para estabilizar los sistemas.

Su aplicación más notable en la vida cotidiana se ve reflejada en el control de estabilidad de grúas. En el área de vehículos eléctricos unipersonales, la compañía Segway, Inc., ha diseñado varios vehículos donde el conductor introduce como referencia la velocidad y dirección, mientras el vehículo debe mantener el equilibrio (Triviño, 2020). Otro ejemplo lo representan, los cohetes de un cohete espacial, los cuales requieren de un sistema de control para mantener la posición vertical durante el despegue (Triviño, 2020). También se estudia el péndulo invertido para enfocar el problema de movimiento en robots bípedos a la hora de caminar (Contreras & Vargas, 2006).

El sistema del péndulo invertido consiste en una varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un vehículo o sistema móvil, que se mueve sobre una guía rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza F . Esta fuerza es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición de la varilla (Aracil & Gordillo, 2005).

El interés en el estudio de este tipo de sistema radica en que, salvando las particularidades de cada caso, su modelo matemático presenta una formulación basada en ecuaciones diferenciales, que guarda cierta analogía con procesos reales de mayor complejidad, como el sistema de control de vuelo para aeronaves.

Ahora bien, aunque el péndulo invertido es ampliamente usado en los casos que requieren de estabilización, hoy en día todavía persisten problemas importantes que tienen que ver con la estabilidad, a este respecto (Ogata, 1996) señala que el péndulo invertido es un sistema inestable, ya que puede caer en cualquier momento a menos que se aplique una fuerza de control adecuada. Esta dificultad reside en la estabilización de una posición inestable en lazo abierto, a partir del cual se deriva el problema de control que puede ser resuelto por métodos lineales, ya que en estos tipos de sistemas la estabilización de un punto inestable en lazo abierto no ofrece gran inconveniente, éstos aparecen cuando el sistema es no lineal (Garrido & Villota, 2009).

Es así que, el problema está relacionado con el control de sistemas inestables y altamente no lineales. A menudo se utiliza como un ejemplo académico, principalmente porque, el sistema de control disponible permite mostrar las principales diferencias del sistema en circuito abierto y su estabilidad en circuito cerrado. (Solórzano Peñafiel, 2018). Aunque existen diversas técnicas para diseñar el mejor regulador para estabilizar el péndulo, no todas las técnicas son la mejor elección, en muchas de ellas se pueden encontrar ciertas ventajas respecto a otras, ciertamente no todas representan la mejor opción para mitigar los efectos de estabilidad del péndulo invertido.

La situación descrita ha llevado a plantearse como el objetivo general de este trabajo diseñar un controlador cuadrático lineal para un sistema con un péndulo invertido en un robot móvil, a partir de determinar qué estrategia de control ofrece un mejor rendimiento con respecto al ángulo del péndulo y la posición del robot.

Desarrollo

El Sistema del Péndulo Invertido

El sistema del péndulo invertido consta de un el carro está equipado con un péndulo que puede girar libremente el carro debe moverse para compensar el desplazamiento del péndulo y así mantener el equilibrio (Kurdekar & Borkar, 2013).

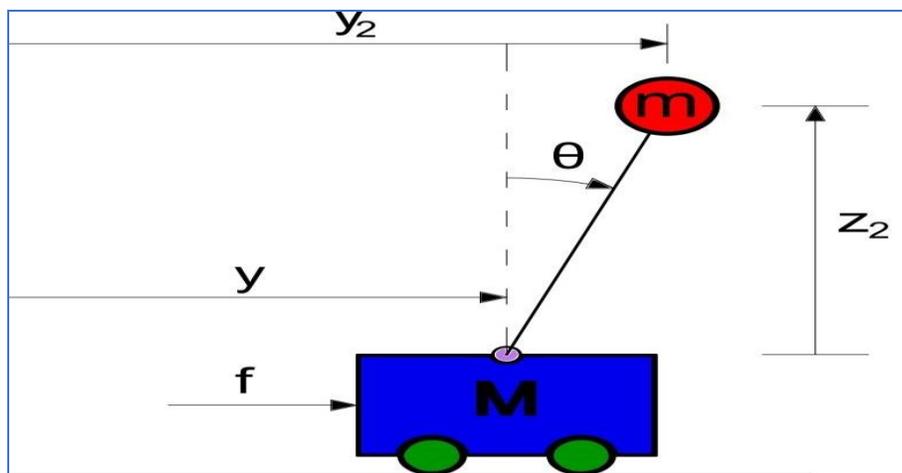


Figura1. Esquema péndulo invertido.
Fuente: (Kurdekar & Borkar, 2013)

Aplicaciones en la Vida Cotidiana

El sistema de péndulo invertido, se aplica comúnmente en el control de estabilidad de grúas, así también este modelo matemático ha sido empleado en la construcción de vehículos de desplazamiento para humanos, como es el caso de famoso vehículo Segway (Mantz, 2014).



Figura 2. Vehículo Segway
Fuente: (Mantz, 2014)

Diseño de Regulador Cuadrático Lineal (LQR)

Hay diferentes métodos o procedimientos para controlar el péndulo invertido. Uno es el procedimiento de colocación de polos que tiene la ventaja de proporcionar una relación mucho más clara entre los parámetros ajustados y los cambios resultantes en el comportamiento del controlador (Ávila & Suárez, 2012).

El controlador LQR se da aquí en el sistema de espacio de estado representado con sus matrices A, B y con el controlador LQR (mostrado con la -K).

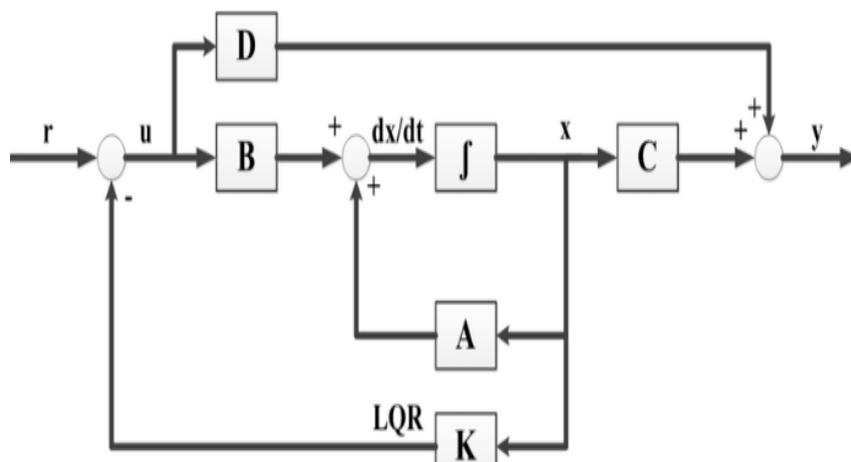


Figura 3. Control lineal cuadrático LQR.

La representación esquemática del control del espacio de estados mediante un controlador LQR, el problema LQR se basa en las siguientes tres suposiciones

1. Todos los estados $x(t)$ están disponibles para retroalimentación, es decir, que se puede medir mediante sensores etc.
2. El sistema es estable, lo que significa que los modos inestables son controlables
3. El sistema es detectable teniendo todos sus modos inestables observables

Para verificar si el sistema es controlable y observable, usamos las funciones $obsv(A, C)$ y $ctrb(A, B)$ y encontramos que esto es cierto (Solórzano Peñafiel, 2018).

El diseño LQR es parte de lo que en el área de control se denomina control óptimo. Este regulador proporciona una ley de control óptimo para un sistema lineal con un índice de rendimiento cuadrático que genera una función de costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Donde $Q=Q^T$ y $R=R^T$ son parámetros de ponderación que penalizan los estados y el esfuerzo de control, respectivamente. Estas matrices son, por lo tanto, parámetros de ajuste del controlador. Así mismo, los valores elegidos de R penalizarán el esfuerzo de control.

Por lo tanto, en un problema de control óptimo, el sistema de control busca maximizar el retorno del sistema con el mínimo costo.

Ley de control óptimo $u = -K x(t)$, donde u es la entrada de control y K es la ganancia dada como $K = R^{-1}B^T S$. Se puede demostrar que solución del este problema se puede encontrar resolviendo la ecuación algebraica de Riccati.

$$S A + A^T S + Q - P B R^{-1} B^T S = 0$$

Por lo tanto, el proceso de minimizar la función de costo implica resolver esta ecuación, que se hará con el uso de la función “LQR” de MATLAB.

Diseño de Filtro de Kalman

En el diseño anterior del observador de estado, se suponía que las mediciones $y = Cx$ no tenían ruido. Este no suele ser el caso en la vida práctica. Otras entradas desconocidas que producen las ecuaciones de estado en la forma de espacio de estado estocástico general (Martín, 2005).

$$\dot{x} = A x + B u + G d$$

$$Y = Cx + H_d + n$$

Donde las matrices G se pueden establecer en una matriz de identidad, H se puede establecer en cero, d es estacionario, ruido de proceso blanco gaussiano medio cero y n es ruido de sensor del mismo tipo.

En esta sección mostraremos cómo se puede aplicar el filtro de Kalman para estimar el vector de estado x y el vector de salida \hat{y} usando las entradas conocidas u y las medidas y . Se representan esquemas de bloque de un filtro Kalman conectado a la planta (Martín, 2005).

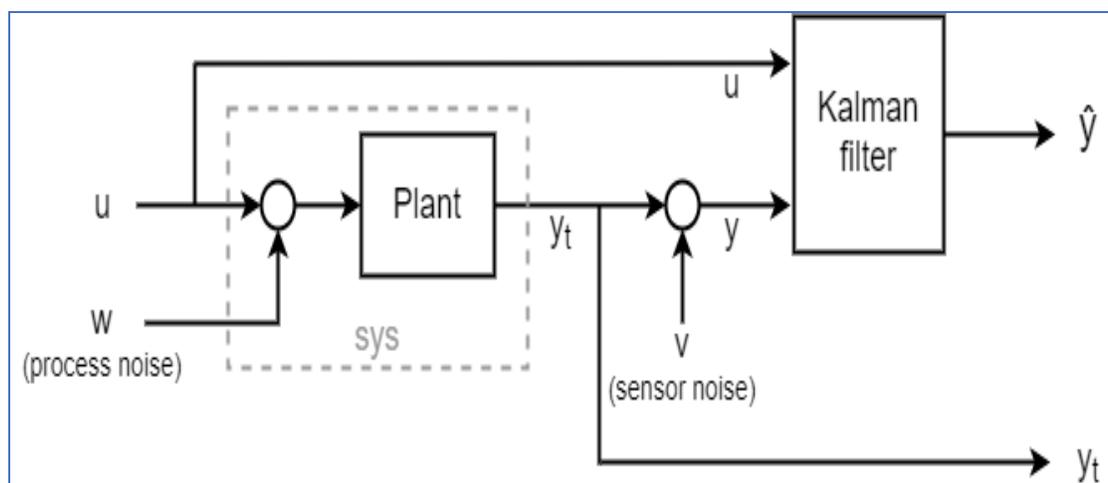


Figura 4. Filtro de Kalman utilizado como observador óptimo.
Fuente: (Martín, 2005).

Se puede demostrar que esto dará como resultado una estimación óptima del estado.

El filtro de Kalman es esencialmente un conjunto de ecuaciones matemáticas que implementan un estimador de tipo predictor-corrector que es óptimo en el sentido de que minimiza la covarianza del error estimado cuando se cumplen algunas condiciones supuestas el error de estimación cuadrático medio está dado por:

$$J = E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T [x(t) - \hat{x}(t)]\}$$

Dónde:

$$E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T y(t)\} = 0$$

La ganancia óptima de Kalman viene dada por $L(t) = S_e(t) C^T R^{-1}$, donde $S_e(t)$ es lo mismo que J ó sea la función costo. Además, cuando $t \rightarrow \infty$, la ecuación algebraica de Riccati se puede escribir como $S_e = 0$

$$S_e A^T + A S_e + Q - S_e C^T R^{-1} C S_e = 0$$

Donde Q y R son las covarianzas del ruido de proceso y de medición, respectivamente. Es necesario ajustar el filtro de Kalman si no se conocen. Tenga en cuenta que, al controlar el robot, se utilizará un codificador de cuadratura para medir la posición. Dado que este dispositivo no implica ningún ruido, podemos en el siguiente conjunto $R_n = 0$. Finalmente, la ganancia de Kalman subóptima para un filtro de Kalman de estado estable se puede expresar como $L = S_e C^T R^{-1}$ (Martín, 2005).

Controlador LQG

El controlador LQG es simplemente la combinación de un filtro Kalman con un controlador LQR regular. El principio de separación garantiza que éstos puedan diseñarse y calcularse de forma independiente. Los controladores LQG se pueden utilizar tanto en sistemas lineales invariantes en el tiempo como en sistemas lineales variantes en el tiempo. La aplicación a sistemas lineales variantes en el tiempo permite el diseño de controladores de retroalimentación lineal para sistemas inciertos no lineales, como es el caso del sistema péndulo-robot. El esquema de un LQG es, en esencia, similar al representado en la figura 4 . Por lo tanto, la matriz L de ganancia del observador en esta figura ahora se puede definir como la ganancia de Kalman. Sin embargo, también asumimos perturbaciones en forma de ruido, de modo que el sistema en forma comprimida (Rosas, 2022).

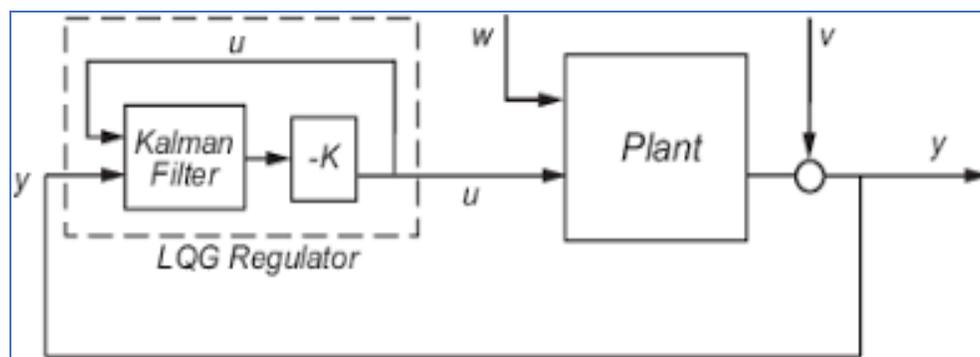


Figura 5 Regulador LQG
Fuente: (Rosas, 2022)

Modelo Matemático de Péndulo Invertido

El péndulo invertido sobre un carro es un servo mecanismo que consta de una varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre una base móvil, a la que comúnmente se le llama carro (Castañeda, Nieto, & Ortiz, 2013).

Este último se mueve sobre una guía rectilínea horizontal por la acción de una fuerza u , que es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición del péndulo, como se muestra en la figura 3, donde la masa del péndulo se concentra en el extremo superior de este. Para que se pueda implementar este proyecto en un laboratorio, se han marcado límites en la movilidad del péndulo y la posición del carro.

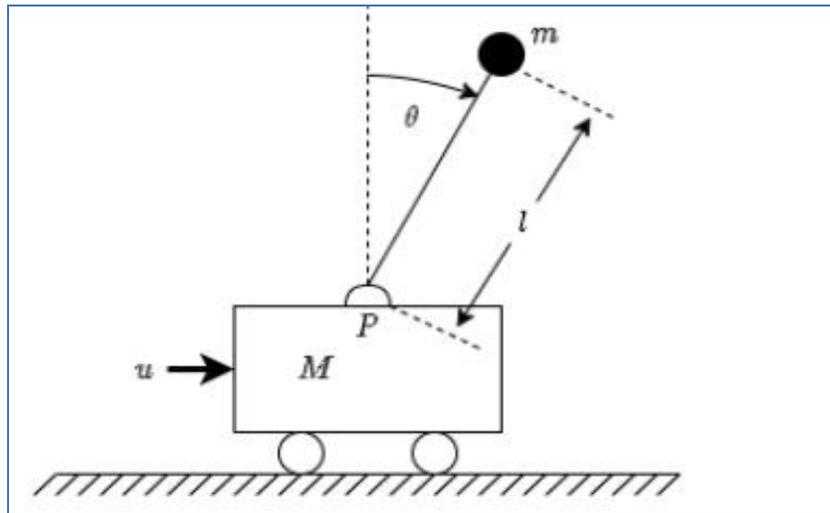


Figura 6. Péndulo invertido

Dónde:

- M : Masa del carro
- m : Masa del péndulo
- l : Longitud del péndulo
- u : Fuerza aplicada al carro
- P : Punto de articulación
- θ : Ángulo del péndulo respecto a la normal

Lagrangiana del Sistema Péndulo Invertido

$$L = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} [(\dot{x} + \dot{x}_p)^2 + \dot{y}_p^2] - m g y_p \quad (1)$$

$x_p = l \sin \theta$; y su derivada de la posición x_p respecto al tiempo $\dot{x}_p = \dot{\theta} l \cos \theta$

$y_p = l \cos \theta$ y su derivada de posición y_p respecto al tiempo $\dot{y}_p = -\dot{\theta} l \sin \theta$, reemplazando estas expresiones en la ecuación 1.

Dónde:

x – Posición relativa de carro

x_p - Posición relativa de péndulo invertido en el eje del movimiento del carro

y_p - Posición relativa de péndulo invertido en el eje vertical y

$$L = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} [(\dot{x} + \dot{\theta} L \cos \theta)^2 + \dot{\theta}^2 L^2 \sin^2 \theta] - m g L \cos \theta \quad (2)$$

$$L = \frac{(M+m)}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{\theta}^2 L^2 + m \dot{x} \dot{\theta} L \cos \theta - m g L \cos \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m) \dot{x} + m L \dot{\theta} \cos \theta \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m L^2 \dot{\theta} + m L \dot{x} \cos \theta \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m g L \sin \theta - m L \dot{x} \sin \theta \quad (7)$$

Ecuaciones Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = u \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad (9)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler Lagrange obtenemos los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} (M+m) \ddot{x} + m \dot{\theta} L \cos \theta - mL \dot{\theta}^2 \sin \theta = u & (10) \\ m g L \sin \theta - mL^2 \ddot{\theta} - mL \ddot{x} \cos \theta = 0 & (11) \end{cases}$$

Modelo en Espacio de Estados

En la representación en variable de estados del péndulo invertido sabemos que un sistema SIMO que consta de una entrada y múltiples salidas, donde la entrada u es una señal control y como salidas son las posiciones del carro y el ángulo del péndulo.

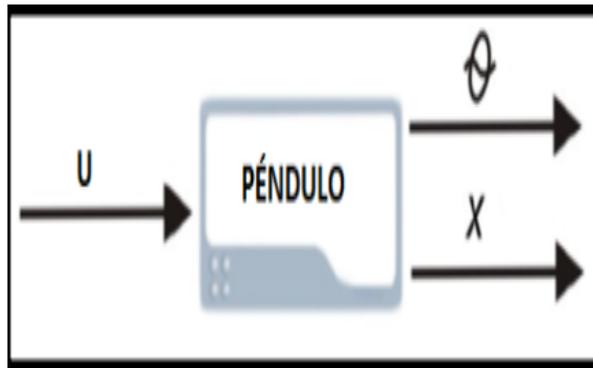


Figura 7. Diagrama de bloque del sistema péndulo invertido

Las ecuaciones en variables de estados están definidas mediante las siguientes expresiones $\dot{x} = A(t)$

$$x(t) + B(t) u(t) \quad \text{- Ecuación de estados}$$

$$y = C(t) x(t) + D(t) u(t) \quad \text{- Ecuación de salida}$$

Conociendo las ecuaciones que describen la dinámica de péndulo invertido se escogen las variables de estados del sistema las cuales son las siguientes:

$$X_1 = \theta,$$

$$X_2 = \dot{\theta} = \dot{X}_1$$

$$X_3 = x$$

$$X_4 = \dot{x} = \dot{X}_3$$

Para analizar la dinámica del sistema del péndulo invertido es necesario linealizar el modelo matemático, en donde del péndulo invertido va tener 2 puntos de equilibrio en $\theta = 0$ y cuando $\theta = \pi$ y también vamos a considerar la siguientes

- $\sin \theta \approx \theta$
- $\cos \theta \approx 1$
- $\dot{\theta}^2 = 0$

Sistema Linealizado

$$\begin{cases} (M + m) \ddot{x} + m L \ddot{\theta} = u & (12) \\ m L \ddot{x} + m L^2 \ddot{\theta} - m g L \theta = 0 & (13) \end{cases}$$

Despejando \ddot{x} de la ecuación 13 obtenemos los siguientes $\ddot{x} = g \theta - L \ddot{\theta}$ (14) y reemplazando ecuación

12 tenemos lo siguiente $\ddot{\theta} = \frac{m+M}{ML} g \theta - \frac{u}{ML}$ (15) y si volvemos a reemplazar la ecuación 15 en la ecuación

14 $\ddot{x} = g \theta - \frac{M+m}{M} g \theta + \frac{u}{M}$ (16), con estas expresiones podemos formar los sistemas en variables en

espacio de estados teniendo en cuenta lo siguientes:

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 = \dot{\theta} \quad \text{y} \quad \dot{X}_4 = \dot{X}_3 = \dot{x}$$

- $\dot{X}_1 = X_2$
- $\dot{X}_2 = \frac{m+M}{ML} g X_1 - \frac{u}{ML}$
- $\dot{X}_3 = X_4$
- $\dot{X}_4 = \left(1 - \frac{M+m}{M}\right) g X_1 + \frac{u}{M}$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{ML}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left(1 - \frac{M+m}{M}\right)g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ML} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Control Lineal Cuadrático Gaussiano LQG

En la teoría de control, el problema de control lineal-cuadrático-gaussiano (LQG) es uno de los problemas de control óptimo más fundamentales. Estos son sistemas lineales impulsados por ruido gaussiano blanco aditivo. El problema es definir la ley de retroalimentación de salida óptima en el sentido de que minimice el valor esperado del criterio de costo cuadrático. Se supone que las mediciones de salida están corrompidas por el ruido gaussiano y, de manera similar, se supone que el estado inicial es un vector gaussiano aleatorio.

Bajo estos supuestos, el esquema de control óptimo en la clase de reglas de control lineal se puede inferir mediante el argumento de finalización al cuadrado. Esta ley de control, conocida como controlador LQG, es única y simplemente combina un filtro de Kalman (estimador de estado cuadrático lineal (LQE)) con un regulador cuadrático lineal (LQR). El principio de separación establece que el estimador de estado y la retroalimentación de estado se pueden diseñar de forma independiente. El control LQG es una ley de control de retroalimentación dinámica lineal que se aplica tanto a sistemas de tiempo lineal como lineales invariantes en el tiempo y es fácil de calcular e implementar. El propio controlador LQG es un sistema dinámico como un sistema de control. Ambos sistemas tienen la misma dimensión de estado.

Metodología

Se describe la investigación como: de tipo cuantitativa, con diseño de un estudio no experimental de tipo transeccional descriptivo. Con apoyo de una indagación documental que permitió obtener el marco referencial de este estudio. Para el desarrollo operativo de esta investigación, se efectuó una programación y simulación en Matlab, en función de que estas herramientas han probado tener un buen desempeño en función del interés perseguido en esta indagación, así también se llevó a cabo el registro del proceso, el cual arrojó resultados satisfactorios.

Esta investigación está desarrollada bajo el enfoque cuantitativo porque se buscó describir objetivamente la realidad en torno a los requerimientos para un diseño óptimo de un controlador LQG para un sistema mecánico de un péndulo invertido. Este paradigma obedece a una rigurosidad científica que debe ser garantizada a través del seguimiento adecuado y oportuno de los pasos del método científico. Según (Hernández, Fernández, & Baptista, 2006), la investigación es descriptiva porque trabaja sobre realidades de hechos y se busca presentar una interpretación correcta sobre qué estrategia

de control ofrece un mejor rendimiento con respecto al ángulo del péndulo invertido y la posición del robot por medio de la descripción, registro, análisis e interpretación de la información recabada y los cálculos efectuados para tal fin.

Por su parte, los estudios descriptivos de acuerdo con (Corral, Fuentes, Brito, & Maldonado, 2011) sirven para identificar características de la población, buscan señalar formas de conducta y/o comportamientos concretos, especificar propiedades importantes de grupos, comunidades o cualquier fenómeno que sea sometido a análisis.

Esta pesquisa también se apoyó en una investigación documental que permitió obtener el marco referencial de este estudio. (Arias, 2006), define la investigación documental como: “un proceso basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos secundarios, es decir, los obtenidos y registrados por otros investigadores en fuentes documentales: impresas, audiovisuales o electrónicas” (p.27).

Para el desarrollo operativo de esta investigación, se realizaron los cálculos pertinentes que permiten obtener la descripción matemática del problema y la posible solución. Igualmente, se efectuó una programación y simulación en Matlab, en función de que estas herramientas han probado tener un buen desempeño en función del interés perseguido en esta indagación, así también se llevó a cabo el registro del proceso, el cual arrojó resultados satisfactorios.

Cálculos y Resultados

Descripción Matemática del Problema y la Solución

Tiempo Continuo

Considere el sistema dinámico lineal de tiempo continuo

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v_d(t)$$

$$y = C(t)x(t) + w_d(t)$$

Programación y Simulación en Matlab

```
%% CONTROL GAUSSIANO PENDULO INVERTIDO
close all
clear all
clc
m = 1; M = 5; L = 2; g = -9.8; d = 1;
b = 1;
A = [0 1 0 0; 0 -d/M b*m*g/M 0; 0 0 0 1; 0 -b*d/(M*L) -b*(m+M)*g/(M*L) 0];
B = [0; 1/M; 0; b*1/(M*L)];
C = [1 0 1 0];
D = 0;
Estabilidad = eig(A);
Controlabilidad = rank(ctrb(A,B));
Q = eye(4);
R = .0001;
K = lqr(A,B,Q,R);

to = 0:.001:10;
x0 = [-1; 0; pi; 0];
wr = [1; 0; pi; 0];
u=@(x)-K*(x - wr);
[t,x] = ode45(@(t,x) cartpend(x,m,M,L,g,d,u(x)),to,x0);

plot(t,x,'linewidth',4)
grid on
title('Sistema del pendulo invertido','FontSize',15)
xlabel('Tiempo','FontSize',12)
ylabel('Variables en espacio de estado','FontSize',12)
legend('X','V','?','?','FontSize',12);
set(gca,'FontSize',14);
```

Resultados

Una vez hecho la programación del control gaussiano de péndulo invertido obtuvimos que las curvas de control para las variables de estados las cuales estabilizan el sistema del péndulo invertido

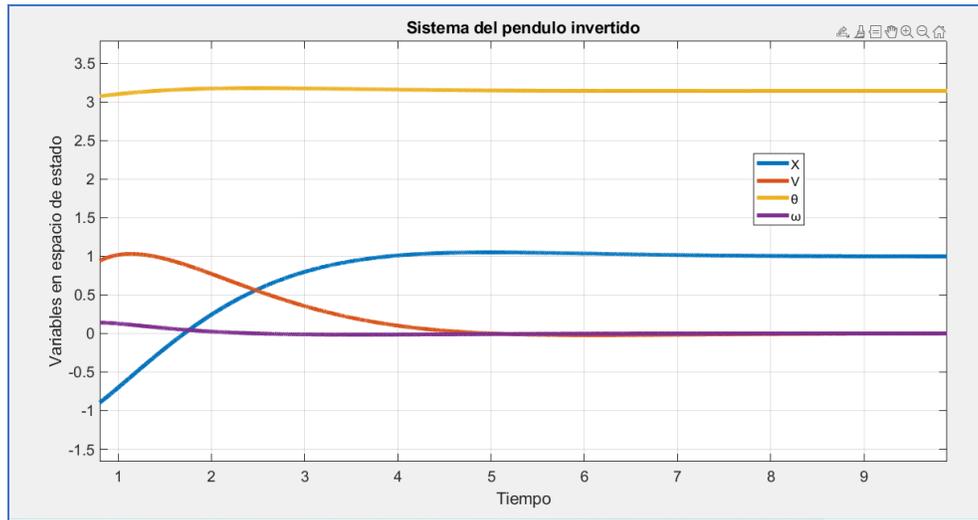


Figura 8. Respuesta del sistema péndulo invertido.

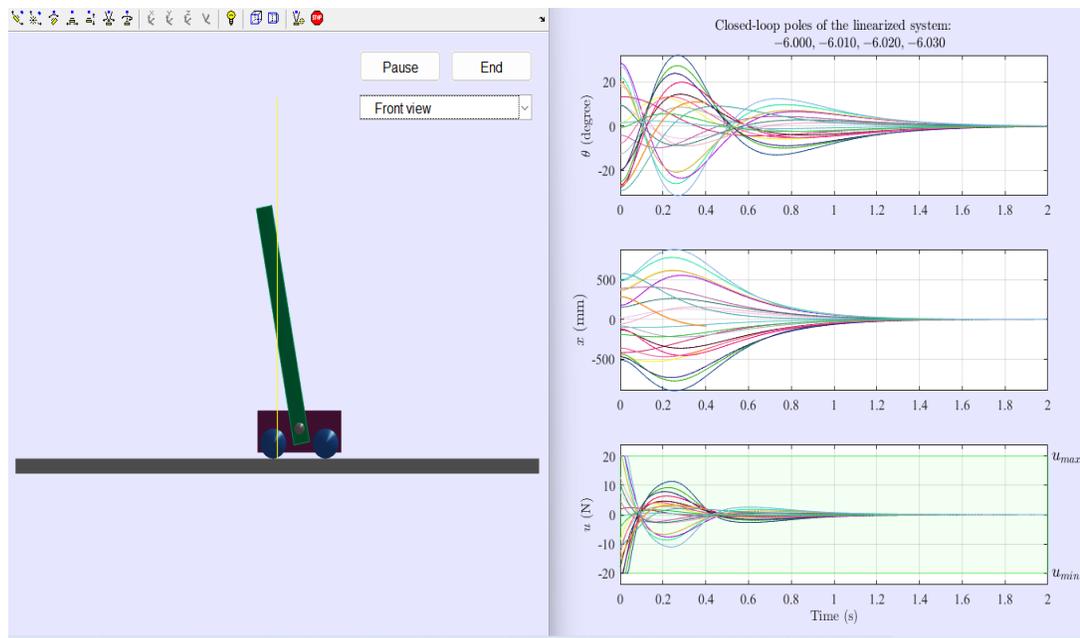


Figura 9. Respuesta del sistema péndulo invertido teniendo a diferentes valores de fuerza aplicada.

Conclusiones

Este informe ha demostrado que mediante la manipulación adecuada de las ponderaciones de estado/control y las matrices de covarianza de ruido, tanto LQR como LQG darán un resultado satisfactorio.

Referencias Bibliográficas

- Anderson, C. (2014). Aprendiendo a controlar un péndulo invertido mediante redes neuronales. *Revista de sistemas de control IEEE*, 2-5.
- Aracil, J., & Gordillo, F. (2005). El Péndulo Invertido. Un Desafío Para el Control no Lineal. *Revista Interamericana de Automática e Informática Industrial*, Vol. 2, pp. 8-19.
- Arias, F. (2006). *El proyecto de Investigación: Introducción a la metodología científica*. Caracas, Venezuela: Editorial Episteme. 5ta Edición.
- Ávila, C., & Suárez, F. (2012). Diseño de controladores basados en técnicas de control óptimo lqr+ iy h2 para un prototipo del péndulo invertido sobre ruedas. *Revista Politécnica*; Vol. 8. Núm. 15. <https://revistas.elpoli.edu.co/index.php/pol/article/view/320>, pp. 45-51.
- Castañeda, J., Nieto, M., & Ortiz, V. (2013). Análisis y aplicación del filtro de Kalman a una señal con ruido aleatorio. *Scientia et Technica*, Año XVIII, Vol. 18, No 1. *Universidad Tecnológica de Pereira*. ISSN 0122-1701. <https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/8241/5339>, pp.267-274.
- Contreras, L., & Vargas, L. (2006). Generación de modelos de caminata bípeda a través de diversas técnicas de modelamiento. *Ingeniería*, vol. 11, No.2. ISSN: 0121-750. *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Bogotá, Colombia. <https://www.redalyc.org/pdf/4988/498850163003.pdf>, pp. 4-13.
- Corral, Y., Fuentes, N., Brito, N., & Maldonado, C. (2011). *Algunos Tópicos y normas Generales Aplicables a la Elaboración de Proyectos y Trabajos de Grado y de ascenso*. Caracas, Venezuela: Fedupel.
- Díaz, J. G., Mejías, A. M., & Arteaga, F. (2001). *Aplicación de los Filtros de Kalman a Sistemas de Control*. Maracaibo - Venezuela: Ingenierías UP.
- Furuta, K., Yamakita, M. y Kobayashi, S. (2011). *Gire hacia arriba el control del péndulo invertido*. Tokio - Japon : IECON.
- Garrido, R., & Villota, E. (2009). Control Moderno y Optimo (MT –227) . <https://docplayer.es/38308633-Control-moderno-y-optimo-mt-227.html>, pp.1-6.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.
- Huang, SJ y Huang, CL. (2000). *Control de un péndulo invertido mediante modelo de predicción gris*. Yokohama : ransacciones IEEE sobre aplicaciones industriales .
- Kurdekar, V., & Borkar, S. (2013). Inverted Pendulum Control: A Brief Overview. *Semantic Scholar*. Corpus ID: 17673957. <https://www.semanticscholar.org/paper/Inverted-Pendulum-Control%3A-A-Brief-Overview-Kurdekar-Borkar/2ad091ec2c4f3275d4505a232ceaafe4682ee16f>.
- Mantz, R. J. (2014). *Introducción al control óptimo*. La Plata - Argentina: Universidad Nacional de La Plata.
- Martín, G. (2005). Representación en el espacio de los estados y filtro de Kalman en el contexto de las series temporales económicas. *Universidad de La Laguna (ULL)/Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC)*. *Documentos de Trabajo Conjuntos ULL-ULPGC*. <https://acceda.cris.ulpgc.es/bitstream/10553/324/1/626.pdf>, pp.46.
- Ogata, K. (1996). *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A. pp. 625-626.
- Patete, A., Aguirre, I., & Sánchez, H. (2011). Control de un péndulo invertido basado en un modelo reducido. *Revista Ingeniería UC*, Vol.18. Núm. 1. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/ingenieria/revista/V18n1/art02.pdf>, pp.12-22.
- Rincón Martínez, J., & Pineda Gonzalez, G. A. (2019). Diseño de un controlador aplicado a un péndulo invertido utilizando estrategias basadas en aprendizaje de máquina. *Ingenierías UP*, 5-10.
- Rosas, H. (2022). Diseño y análisis comparativo de un sistema de péndulo invertido aplicando técnicas de control lineal cuadrático Gaussiano. *Universidad Católica de Santa María Facultad de Ciencias e Ingenierías Físicas y Formales*. Arequipa-Perú.
- Solórzano Peñafiel, D. K. (2018). *Diseño e implementación de un controlador óptimo LQG, para un sistema de péndulo invertido aplicado en un equipo Lego Mindstorms*. Quito - Ecuador : Universidad Politecnica Salesiana .
- Triviño, L. (2020). Modelado, simulación y control de un péndulo invertido. *Universitat Autònoma de Barcelona*. España. *Trabajo de Fin de Grado*. https://ddd.uab.cat/pub/tfg/2020/234238/TFG_LuisGeovannyTrivinoMacias.pdf, pp.51.
- Valverde, J. L. A., Pérez, M. A. B., Zavaleta, C. R. C., Rodríguez, S. B. R., Alcántara, J. H. A., & Ramos, E. A. M. (2021). CONTROL ÓPTIMO LQR PARA ORIENTAR LA PLATAFORMA MÓVIL DE UN ROBOT PARALELO DE 2GDL EXPERIMENTAL. *Revista de Investigaciones de la Escuela de Posgrado de la UNA PUNO*, 5-11.
- Zavala, S. R., Ortiz, L. A. G., & Marín, J. A. (2009). *Control de un Péndulo Invertido en Tiempo Real Usando Lógica Difusa*. Michoacán, México: Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.