

## Interpretación y formulación geométrica y covariante del electromagnetismo usando las teorías de Gauge y la noción de fibrados tangentes

Geometric and covariant interpretation and formulation of electromagnetism using gauge theories and the notion of tangent fibrates

Interpretação e formulação geométrica e covariante do eletromagnetismo usando teorias de calibre e a noção de fibratos tangentes

**Ismael Elías Erazo-Velasco**

ismael.erazo@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-7647-4611>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador.

**Luis Adrián González-Quiñonez**

luis.gonzalez@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0001-5026-0028>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador.

**Roberto Iván Rodríguez-Jijón**

roberto.rodriguez@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-1055-7921>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador.

**José Vicencio Bautista-Sánchez**

jose.bautista@utelvt.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-3358-1908>

Docente Investigador de la Facultad de Ingenierías de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador.

### RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo reformular con nuevas ideas la teoría electromagnética usando conceptos geométricos, como variedad diferencial, fibrados tangentes, algebra de Lie todo dentro de una teoría Gauge con simetría  $U(1)$  (Transformación unitaria) desde una perspectiva más matemática y no experimental. Dentro de las conclusiones se tiene que: el tensor de curvatura de Faraday  $r_{\mu\nu}$  es igual a tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  cuando existe una conexión afín con simetría local  $U(1)$ . Así, se puede decir que los campos electromagnéticos son una consecuencia de que hay una curvatura en variedad diferencial interna al cuádrivector densidad carga, la carga vive en el espacio tiempo 4 dimensional de la teoría Minkowski, pero la carga tiene asociado un espacio interno con una conexión afín dado por  $A_{\mu}$ , cuando en ese espacio interno hay curvatura entonces se reflejan un campo eléctrico y magnético en el espacio de tiempo de Minkowski o el espacio real donde viven todos los objetos físicos y por esa la razón que podemos medir el campo eléctrico y magnético. Solo cuando en ese espacio interno hay curvatura se manifiesta en nuestro mundo físico un campo eléctrico  $E^{\vec{}}$  y magnético  $B^{\vec{}}$ .

**Palabras clave:** Electromagnetismo, Teorías de Gauge, Noción de Fibrados Tangentes.

### ABSTRACT

The objective of this work is to reformulate the electromagnetic theory with new ideas using geometric concepts, such as differential manifold, tangent bundles, Lie algebra, all within a Gauge theory with  $U(1)$  symmetry (unitary transformation) from a more mathematical perspective and not experimental. Within the conclusions we have that: the Faraday curvature tensor  $r_{\mu\nu}$  is equal to the electromagnetic field tensor  $F_{\mu\nu}$  when there is an affine connection with local symmetry  $U(1)$ . Thus, it can be said that the electromagnetic fields are a consequence of the fact that there is a curvature in differential manifold internal to the charge density quadrivector, the charge lives in the 4-dimensional space-time of the Minkowski theory, but the charge has an internal space associated with a affine connection given by  $A_{\mu}$ , when in that internal space there is curvature then an electric and magnetic field are reflected in the Minkowski space of time or the real space where all physical objects live and for that reason we can measure the electric field and magnetic. Only when there is curvature in that internal space does an electric field  $E^{\vec{}}$  and a magnetic field  $B^{\vec{}}$  manifest in our physical world.

**Keywords:** Electromagnetism, Gauge Theories, Notion of Tangent Fibrates.

### RESUMO

O objetivo deste trabalho é reformular a teoria eletromagnética com novas ideias usando conceitos geométricos, como variedade diferencial, fibrados tangentes, álgebra de Lie, tudo dentro de uma teoria de Gauge com simetria  $U(1)$  (transformação unitária) de uma perspectiva mais matemática e não experimental. Dentro das conclusões temos que: o tensor de curvatura de Faraday  $r_{\mu\nu}$  é igual ao tensor de campo eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  quando há uma conexão afim com simetria local  $U(1)$ . Assim, pode-se dizer que os campos eletromagnéticos são uma consequência do fato de que há uma curvatura no coletor diferencial interno ao quadrivetor densidade de carga, a carga vive no espaço-tempo quadridimensional da teoria de Minkowski, mas a carga tem um espaço interno associado a uma conexão afim dada por  $A_{\mu}$ , quando nesse espaço interno há curvatura então um campo elétrico e magnético são refletidos no espaço de tempo Minkowski ou no espaço real onde todos os objetos físicos vivem e por essa razão podemos medir o campo elétrico e magnético. Somente quando há curvatura nesse espaço interno é que um campo elétrico  $E^{\vec{}}$  e um campo magnético  $B^{\vec{}}$  se manifestam em nosso mundo físico.

**Palavras-chave:** Eletromagnetismo, Teorias de Gauge, Noção de Fibratos Tangentes.

## Introducción

El electromagnetismo es una rama de la física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría. El electromagnetismo describe la interacción de los portadores de carga con campos eléctricos y magnéticos. Toda fenomenología de los campos eléctricos y magnéticos se pueden explicar a partir de las cuatro ecuaciones de Maxwell (Grimsky, 2018). Las ecuaciones de Maxwell, desde un punto de vista matemático son un sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden, apareciendo entremezclados los campos eléctricos y magnéticos (Ferrando & Valero, s/f). Las ecuaciones de Maxwell se pueden agrupar de la siguiente manera; 1) la ley de Coulomb diferencial; 2) La ausencia de cargas magnéticas; 3) La forma diferencial de la ley de Faraday-Lenz y; 4) la forma diferencial de la ley de Ampère, modificada por Maxwell (Cordero, 2017, pág. 162).

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un pilar básico de la teoría electromagnética, y son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas que, junto con la ley de fuerza de Lorentz, forman la base del electromagnetismo clásico, la óptica clásica y los circuitos eléctricos.

Las ecuaciones de Maxwell, proporcionan un modelo matemático para las tecnologías eléctricas, ópticas y de radio, como la generación de energía, los motores eléctricos, la comunicación inalámbrica, las lentes, el radar, entre otras, en esencia escriben cómo las cargas, las corrientes y los cambios de los campos generan campos eléctricos y magnéticos.

La vida cotidiana involucra muchos fenómenos eléctricos, tales como el sistema de iluminación, dispositivos como los teléfonos celulares, televisores, motores, equipos reproductores de sonido y video u otros (Cordero, 2017).

En la contemporaneidad, la teoría de Maxwell puede definirse como “Relatividad Especial más Invariancia de Gauge” (Rodríguez & Lamberti, 2013, pág. 368). La invariancia de Gauge, significa que todas las cantidades físicamente significativas permanecen estables o se transforman naturalmente bajo transformaciones de gauge (Rodríguez & Lamberti, 2013). La teoría de Gauge, llamada también teoría de calibre, es una clase de teoría que se fundamenta en la idea de que las transformaciones pueden ser de tipo local o global (Huamani & Villegas, 2011). Una transformación de simetría global es idéntica para todos los puntos del espacio tiempo. Por su parte, una transformación de simetría local es distinta en cada punto del espacio tiempo, depende de las coordenadas de este punto (Balart, s/f). Una teoría gauge es invariante bajo un grupo local de transformaciones, la exigencia de que las transformaciones sean globales es dejada de lado y los Lagrangianos poseen simetría local (Frampton, 2008).

Muchos conceptos importantes en física son interpretados en términos de la geometría de los espacios fibrados (Vílchez, 1996). La teoría de electromagnetismo de Maxwell es esencialmente una teoría de conexiones sobre fibrados principales con un grupo de calibre dado  $G$  como la fibra. Existen distintos tipos de fibrados como: fibrados vectoriales, fibrados principales y fibrados asociados, en este último grupo se tiene, los fibrados asociados a un fibrado principal (Vílchez, 1996).

Un fibrado vectorial puede ser visto como una familia de espacios vectoriales parametrizados por una variedad y que salvo isomorfismos son localmente fibrados triviales que tienen como fibra espacios vectoriales  $V$  de dimensión finita y a  $GL(V)$  el grupo de automorfismos de  $V$  como grupo de estructura. Además se pueden describir globalmente mediante las llamadas funciones de transición (Vílchez, 1996). Los fibrados principales son aquellos cuya fibra es un grupo de Lie. Un fibrado principal, consiste en una variedad  $P$ , (llamada el espacio total). Un grupo de Lie  $G$  (grupo de estructura), la variedad base  $M$  y la aplicación proyección  $\pi: P \rightarrow M$  (Vílchez, 1996). En el estudio de las transformaciones de calibre (gauge), se introduce la noción de espacio fibrado asociado a un fibrado principal (Vílchez, 1996).

Sobre la base de las consideraciones anteriores, se tiene como objetivo del presente trabajo reformular con nuevas ideas la teoría electromagnética usando conceptos geométricos, como variedad diferencial, fibrados tangentes, algebra de Lie todo dentro de una teoría Gauge con simetría U (1) (Transformación unitaria, desde una perspectiva más matemática y no experimental.

## Desarrollo

### Leyes de Maxwell

Los fenómenos electromagnéticos se pueden describir a partir de las cuatro ecuaciones de Maxwell:

1.- Ley de Gauss para el campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

2.- Ley de Gauss para el campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

3.- Ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (3)$$

4.- Ley generalizada de Ampere

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad (4)$$

Sabiendo que el campo magnético se puede calcular como  $\vec{B} = \nabla \times (\vec{A})$  donde  $(\vec{A})$  es el vector potencial magnético, si ahora remplazamos esta expresión del campo magnético en ley de Faraday tenemos lo siguiente  $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A})$ , si ahora simplificamos un poco esta expresión  $\nabla \times (\vec{E} + (\partial)/\partial t \vec{A}) = 0$  (6) (Alvarado Silos, 2020).

Para que se cumpla ecuación 6 lo único que se debe pasar es que el rotacional de lo que está dentro del paréntesis debe ser igual a un gradiente de función escalar (Grimasky, 2018).

$\vec{E} + (\partial)/\partial t \vec{A} = \nabla \Phi$  y se despeja el campo eléctrico se obtiene la siguiente expresión

$$\vec{E} = \nabla \Phi - (\partial)/\partial t \vec{A} \quad (7).$$

### Ley de Gauss Para el Campo Eléctrico

El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga q contenida dentro de la superficie, dividida por la constante  $\epsilon_0$ .

El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga q contenida dentro de la superficie, dividida por la constante  $\epsilon_0$ .

La superficie cerrada empleada para calcular el flujo del campo eléctrico se denomina superficie gaussiana (Aceña, 2017).

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} \quad (8)$$

Si aplicamos el teorema de Gauss de la divergencia podemos llegar de la ecuación 5 a la expresión 1 (Alvarado Silos, 2020).

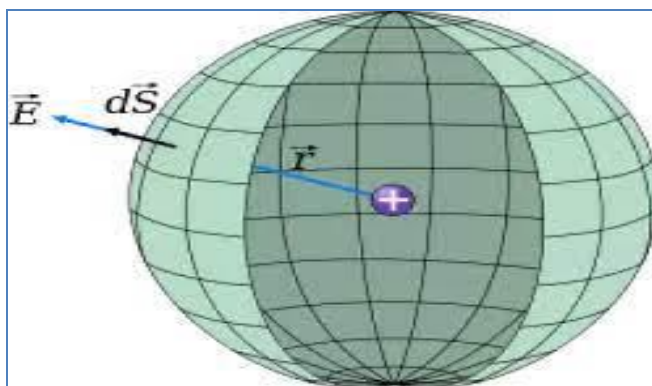


Figura 1. Ley de Gauss para campo eléctrico.  
Fuente: (Alvarado Silos, 2020).

### Ley de Gauss Para Magnetismo

La ley de Gauss para el magnetismo, que se expresa en sus formas integral y diferencial como:

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (9)$$

Esta ley representa la ausencia de cargas magnéticas, o a menudo se les llama monopolos magnéticos. Las distribuciones de fuentes magnéticas son siempre neutrales en el sentido de que tienen polos norte y sur, por lo que su flujo a través de cualquier superficie cerrada es cero (Grimasky, 2018).

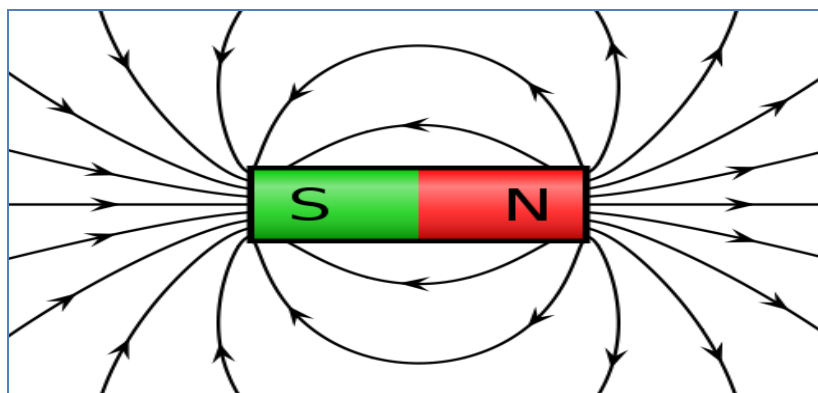


Figura 2. Ley de Gauss para campo magnetismo.  
Fuente: (Grimasky, 2018).

### Ley de Faraday

La ley de inducción electromagnética de Faraday (o simplemente ley de Faraday) establece que el voltaje inducido en un circuito cerrado es proporcional a la velocidad a la que el flujo magnético se propaga a través de cualquier superficie del circuito a medida que el límite cambia con el tiempo (Aceña, 2017).

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint B \cdot d\vec{s} \quad (10)$$

Si se usa el teorema de Stokes se puede llegar a ecuación 3 a partir de la ecuación 7

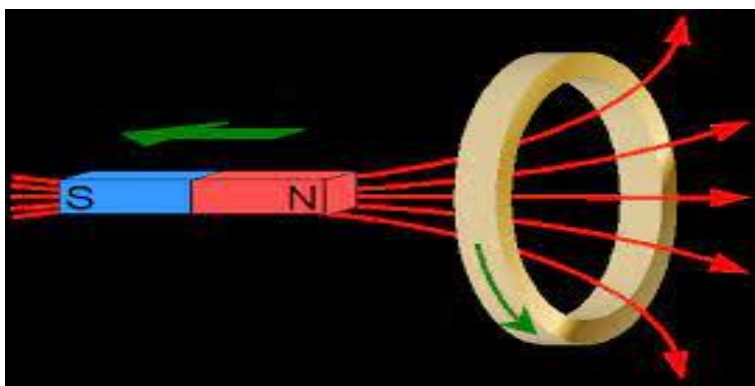


Figura 3. Ley de Gauss para campo magnetismo.

### Ley Generalizada de Ampere

La ley de Ampere – Maxwell nos dice que el campo magnético que atraviesa una trayectoria cerrada y que encierra a una determinada corriente eléctrica que provoca a este campo magnético es igual a la constante de permeabilidad del vacío  $\mu_0$  por la suma de 2 tipos de corriente intensidades, la total otra corriente llamada corriente de desplazamiento, en palabras también muy general, la ley de Ampere-Maxwell establece que campo magnético es generado tanto por una corriente de conducción de desplazamientos (Book, 2017).

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i + \frac{\partial}{\partial t} \iint E \cdot d\vec{S} \quad (11)$$

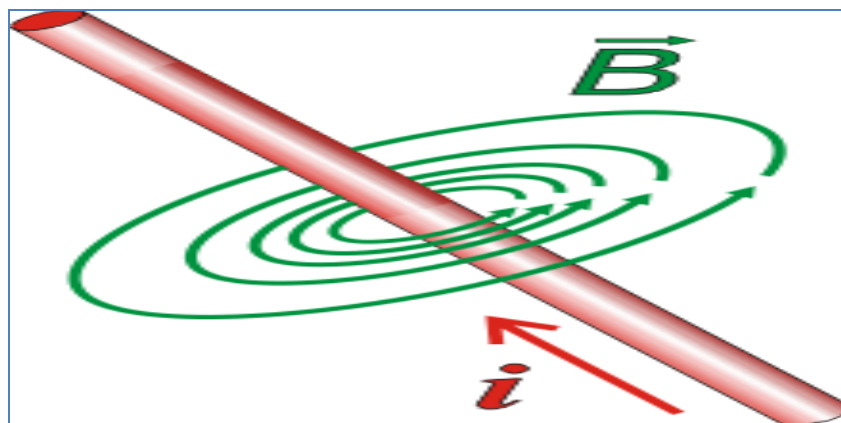


Figura 4. Ley generalizada de Ampere Maxwell.

## Interpretación Clásica del Electromagnetismo

La interpretación clásica de los campos eléctricos y magnéticos son una consecuencia intrínseca de la presencia de una carga eléctrica, la carga eléctrica por el simple hecho de existir genera líneas de fuerzas a las cuales la denominamos campo eléctrico y la existencia de un campo magnético se genera (Grimasky, 2018) debido a la movimiento de estas cargas con una velocidad, es decir la carga eléctrica produce un campo magnético cuando esta tiene una velocidad asociada y si la carga tiende a acelerarse esto produce un fluctuación de los campos eléctricos y magnéticos los cuales generan ondas electromagnéticas las cuales se propagan a velocidad de la luz y que cuya ecuación de onda es la siguiente (Grimasky, 2018).

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0 \quad (13)$$

### Formulación Geométrica

Para dar una interpretación mucho más profunda y precisa de los campos electromagnéticos es necesario discutir la naturaleza de la carga eléctrica, porque clásicamente se da por hecho las cargas son las que generan dichos campos, pero la pregunta es la siguiente:

**¿Porque las cargas eléctricas generan campos electromagnéticos y cuál es su naturaleza intrínseca?**

Para responder a esta pregunta debemos primero hacer un breve repaso a conceptos claves como variedad diferencial, derivada covariante, conexión afín, fibrados tangentes, álgebras y grupos de Li Variedad diferencial

Una variedad diferenciable n-dimensional de clase  $C^k$ ,  $0 < k \leq \infty$ , es un conjunto  $M$  junto con una familia de aplicaciones biyectivas llamadas cartas,  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow A_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , donde  $I$  es un conjunto de índices,  $U_\alpha$  es un subconjunto de  $M$  y  $A_\alpha$  es un: Sea  $F: U \rightarrow R^m$ , una función diferenciable definida sobre un abierto  $U$  de  $R^n$ .

Se llama diferencial (geométrica) de  $F$  en  $p \in U$ , a la aplicación lineal: Sea  $U$  un abierto de  $R^n$ . Una función  $\phi: U \rightarrow R$  se dirá diferenciable si posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Recordemos aquí la definición de derivada parcial (de 1er orden) de  $f$  con respecto a  $\xi_i$  ( $i = 1; \dots; n$ ) en  $\pi \in R^n$  (Yauli Huilca & Rosas Meneses, 2020).

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{d(f \circ \alpha^i)}{dt}(0), \quad (11)$$

Siendo  $\alpha^i: R \rightarrow R^n$ ;  $\tau \rightarrow \pi + \tau \xi_i$ . Una función  $\Phi: U \rightarrow R^m$  se dirá diferenciable si todas sus componentes  $\Phi_\varphi: U \rightarrow R$  ( $\varphi = 1; \dots; m$ ) son diferenciables. Sea  $\Phi: U \rightarrow R^m$  una función diferenciable.

La matriz Jacobiana de  $F$  en  $p \in U$  se define por

$$DF(p) := \left( \frac{\partial(F^1, \dots, F^m)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \right)_{x=p} \equiv \begin{pmatrix} \partial F^1 / \partial x^1 & \dots & \partial F^1 / \partial x^n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F^m / \partial x^1 & \dots & \partial F^m / \partial x^n \end{pmatrix}_{x=p} \quad (12)$$

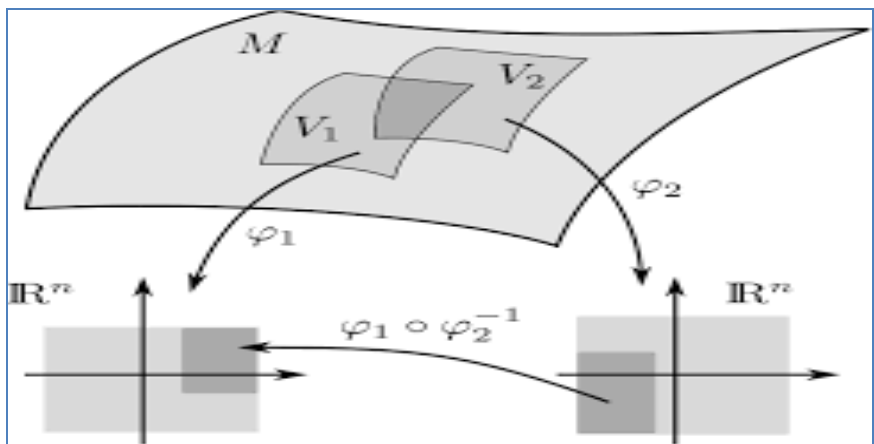


Figura 5. Mapeo de una variedad diferencial a un abierto o una carta.

### Fibrado Tangente

Fijemos un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  y un vector  $v \in \mathbb{R}^n$ . Si pensamos  $v$  como un vector en  $p$ , entonces  $v$  define un modo de derivar funciones en  $p$ , la “derivada direccional en el punto  $p$  respecto del vector  $v$ ”: dada una función  $f$  definida en un entorno de  $p$ , se define la derivada direccional de  $f$  según  $v$  en el punto  $p$  como el escalar  $D_v p f$  dado por la fórmula (Yauli Huilca & Rosas Meneses, 2020).

$$D_p^v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}, \quad (13)$$

Cuando dicho límite exista. Si  $f$  es diferenciable en un entorno de  $p$ , entonces  $D_v p f$  está bien definido, ya que si consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \sigma(t) := p + tv \end{aligned} \quad (14)$$

La imagen de  $\sigma$  es la recta de  $\mathbb{R}^n$  que pasa por  $p$  con la dirección de  $v$ , entonces  $f \circ \sigma$  es diferenciable en un entorno de  $t = 0$  y se cumple:

$$D_p^v f = (f \circ \sigma)'(0) \quad (15)$$

Si  $g$  es otra función diferenciable definida en un entorno de  $p$  tal que  $fp = gp$ , entonces es claro que  $D_p f = D_p g$ ; es decir, tenemos definida la aplicación  $D_p : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$ ,

Esta situación que se da en  $\mathbb{R}^n$  sugiere un modo de definir el concepto de “vector tangente” a una variedad diferenciable arbitraria  $X$  en un punto suyo.

Sea  $p$  un punto de una variedad diferenciable  $X$ . Una derivación en el punto  $p$  es una aplicación  $D : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple:

- (a)  $D\lambda = 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $D(fp + gp) = D(fp) + D(gp)$  para todo  $fp, gp \in \mathcal{O}_p$ ;
- (c)  $D(fp \cdot gp) = D(fp) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(gp)$  para todo  $fp, gp \in \mathcal{O}_p$ .

Nótese que toda derivación en  $p$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal. Obsérvese también que el conjunto  $\text{Der}\mathbb{R}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$  de todas las derivaciones en el punto  $p$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con las operaciones naturales: dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $D, D' \in \text{Der}\mathbb{R}(\mathcal{O}_p, \mathbb{R})$ , para cada  $fp \in \mathcal{O}_p$  es:

$$(D + D')(fp) := D(fp) + D'(fp), (\lambda \cdot D)(fp) := \lambda \cdot D(fp) \quad (\text{Pitter, 2010})$$

### Aplicación Lineal Tangente

Sea  $\varphi : X \rightarrow Y$  una aplicación diferenciable. Dado un punto  $x \in X$  y su imagen  $y = \varphi(x)$  tenemos la aplicación componer con  $\varphi$  entre los anillos de gérmenes,  $\varphi_* : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$ , de modo que entre los respectivos espacios tangentes en  $x$  e  $y$  tenemos la aplicación “componer con  $\varphi_*$ ”: cada vector  $D \in T_x X$  es una derivación  $D : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathbb{R}$ , y como  $\varphi_* : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_x$  es un morfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebras resulta que la composición  $D \circ \varphi_* : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathbb{R}$  es también una derivación, es decir,  $D \circ \varphi_* \in T_y Y$ . La aplicación obtenida se denota  $\varphi_*$ , (Luis & Ortega, n.d.).

$$\varphi_* : T_x X \rightarrow T_y Y \quad D \rightarrow \varphi_*(D) := D \circ \varphi_*$$



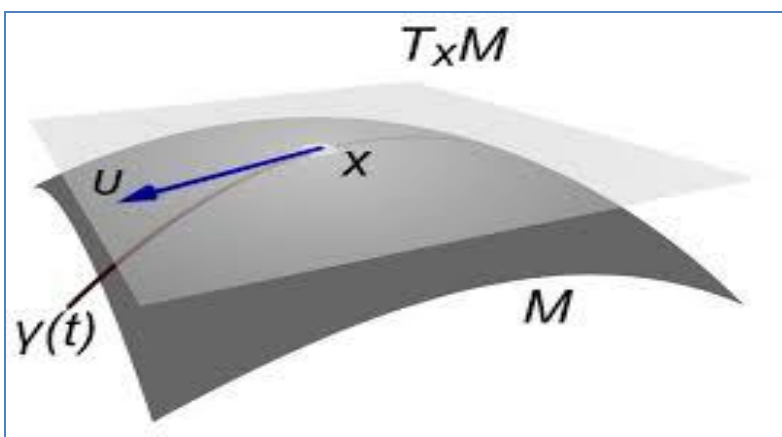


Figura 6. Espacio Tangente.

### Espacio Cotangente

Llamamos espacio cotangente a \$X\$ en \$a\$, \$a \in X\$, y lo denotamos por \$T\_a(X)^\*\$, (o también por \$T^\* a(X)\$) al espacio vectorial dual de \$T\_a(X)\$, ie., \$\text{Hom}(T\_a(X); \mathbb{R})\$. Por tanto, \$\dim T\_a(X)^\* = n\$. A los elementos de \$T\_a(X)^\*\$ se los denomina 1-formas en \$a\$.

Denotaremos por \$\langle \cdot, \cdot \rangle\$, el emparejamiento de un espacio vectorial \$V\$ con su dual \$V^\*\$, de tal modo que si \$u \in V\$, \$\alpha \in V^\*\$, entonces escribiremos \$\langle u, \alpha \rangle \equiv \langle \alpha, u \rangle = \alpha(u) \in \mathbb{R}\$.

Sea \$f \in F(a)\$, \$a \in X\$, entonces \$f\$ define un elemento de \$T\_a(X)^\*\$ usualmente denotada por \$d\_a f\$ (o también por \$(df)\_a\$, llamada diferencial de \$f\$ en \$a\$, a través de \$\langle v, d\_a f \rangle \equiv \langle d\_a f, v \rangle = v \in T\_a(X)\$.

Sea \$(U; \xi)\$ un sistema de coordenadas de \$X\$ en \$a\$, entonces las 1-formas, \$(d\_a \xi^i)\_{1 \leq i \leq n}\$ forman una base de \$T\_a(X)^\*\$, la base dual de \$(\partial/\partial \xi^i)\_a\$.

$$\begin{aligned} \left\langle d_a \xi^i, \left( \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right)_a \right\rangle &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right)_a (\xi^i) = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^j}(a) = \left( \frac{\partial(\xi^i \circ \xi^{-1})}{\partial r^j} \right) (\xi(a)) \\ &= \left( \frac{\partial(r^i \circ \xi \circ \xi^{-1})}{\partial r^j} \right) (\xi(a)) = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\xi(a)) = \delta_j^i. \end{aligned}$$

Por lo que para el vector \$v\$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{1 \leq i \leq n} v^i (\partial/\partial \xi^i)_a \in T_a(X), \\ \langle d_a \xi^j, v \rangle &\equiv (d_a \xi^j)(v) = v^j \end{aligned}$$

### Derivada Covariante

La derivada covariante es una generalización del concepto de derivada parcial que permite extender el cálculo diferencial sobre con coordenadas cartesianas al caso de coordenadas curvilíneas. Supongamos que tenemos  $n$  campos vectoriales que en cada punto forman una base vectorial y un campo vectorial contra variante adicional de tal manera que este campo puede expresarse en términos de la base anterior:

$$V(x) = V^k(x) e_k(x) \quad (16) \quad - \text{ Se usó el convenio de suma de Einstein.}$$

Donde son las componentes del vector en dicha base (Aceña, 2017). Si se usan coordenadas curvilíneas, los vectores tangentes a las curvas coordenadas cambian de punto a punto. Eso implica que aun cuando el campo vectorial sea constante en general sus coordenadas en la base elegida no serán constantes y en general sucederá que la derivada covariante ( ) (Rivas Guijarro, 2014).

$$\partial_i V(x) = \partial_k (V^k(x) e_k(x)) = \partial_i (V^k(x)) e_k(x) + V^k(x) \partial_i(e_k(x)) \quad (17)$$

$$\partial_k V(x) = \partial_k (V^k(x)) e_k(x) + V^k(x) \Pi_{ik}^p e_p(x) \quad (18)$$

Podemos cambiar los índices repetidos de suma de la ecuación 18 para sacar como factor común el versor base  $e_k(x)$

$$\partial_k V(x) = \partial_k (V^a(x)) e_a(x) + V^p(x) \Pi_{ap}^k e_k(x) = (\partial_k V^k(x) + V^p(x) \Pi_{ip}^k) e_k(x) \quad (19)$$

Definimos la derivada covariante como:

$$D V^k(x) = (\partial_k V^k(x) + V^p(x) \Pi_{ip}^k) \quad (20)$$

Donde

$V^p(x)$  - Componentes del campo vectorial

$\partial_k V^k(x)$  - Es la derivada parcial de las componentes del campo vectorial

$\Pi_{ip}^k$  - Es una conexión afín

Observando la expresión de la ecuación 20 podemos ver que la derivada covariante depende intrínsecamente de una conexión afín la cual nos relaciona es un objeto geométrico definido en una variedad diferencial y los conecta con sus espacios tangentes (Pitter, 2010).

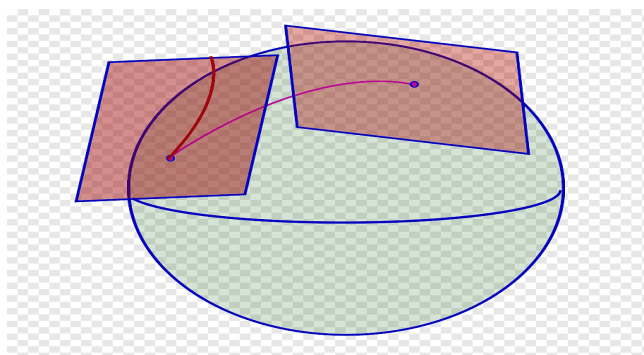


Figura 7. Conexión afín entre espacio tangente.

## Invarianza de un Campo Vector en una Variedad Diferencial

Sabemos que al momento de definir un campo vectorial sobre una variedad diferencial siempre podemos elegir un sistema coordenadas o cartas de manera arbitraria, pero un vector o un campo vectorial es un objeto o ente que deber ser invariante a cualquier sistema de coordenadas que utilicemos, es decir que no importa el sistema de coordenadas que utilicemos la geometría o la física que estemos estudiando debe ser igual, un vector o un campo vectorial es un invariante.

Entonces lo que buscamos es encontrar una relación que debe existir entre un campo vector representado en diferentes sistemas de coordenadas y ver qué ley o regla se debe cumplir para que un campo vectorial se mantenga invariante (Acevedo, Cuzinato, Pimentel, & Pompeia, 2018).

$V^{a'} = M^{a'}_a V^a$  - Transformación de las coordenadas de un vector

$e_{a'} = M^{a'}_a e_a$  - Transformación de los vectores de la base

Donde

$M^{a'}_b$  - Componentes de la matriz cambio de base  $M$

$M^b_{a'}$  - Componentes de la inversa de la matriz cambio de base  $M^{-1}$

Sabiendo cómo cambia el campo vectorial y las matrices cambio de base nos preguntamos lo siguiente como debe cambiar la derivada covariante cuando hacemos un cambio de base en los vectores, es decir queremos que la derivada covariante se comporte como un vector en otras palabras que sea una magnitud invariante, sabemos que la conexión afín es algo que depende únicamente de la variedad diferencial por lo cual la derivada covariante de un vector, generalmente no es otro vector y como consecuencia de esto no es un valor invariante y lo que buscamos es que sea un invariante por lo cual vamos a imponer ciertas condiciones para que se cumpla la invarianza (De la Torre Domínguez, 2022).

$$\partial_\mu (V^a e_a) = \partial_\mu (V^{a'} e_{a'}) \quad (21)$$

$$(\partial_\mu V^a + V^p \Pi^a_{\mu p}) e_a = (\partial_\mu V^{a'} + V^{p'} \Pi'^a_{\mu p'}) e_{a'} \quad (22)$$

$$(\partial_\mu V^a + V^p \Pi^a_{\mu p}) e_a = (\partial_\mu (M^{a'}_a V^a) + V^{p'} \Pi'^a_{\mu p'}) M^{a'}_a e_a \quad (23)$$

$$(\partial_\mu V^a + V^p \Pi^a_{\mu p}) e_a = (M^{a'}_a \partial_\mu V^a + V^p \partial_\mu (M^{a'}_a) + M^{a'}_a V^a \Pi'^a_{\mu p'}) M^{a'}_a e_a \quad (24)$$

De la expresión de la ecuación 24 podemos simplifica el versor base  $e_a$

$$\partial_\mu V^a + V^p \Pi^a_{\mu p} = M^{a'}_a \partial_\mu V^a M^{a'}_a + V^p \partial_\mu (M^{a'}_a) M^{a'}_a + M^{a'}_a V^a \Pi'^a_{\mu p} M^{a'}_a,$$

$$\partial_\mu V^a + V^p \Pi^a_{\mu p} = M^{a'}_a M^{a'}_a \partial_\mu V^a + V^p M^{a'}_a \partial_\mu (M^{a'}_a) + V^a M^{a'}_a \Pi'^a_{\mu p} M^{a'}_a,$$

$$\partial_{\mu} V^a + V^p \Pi_{\mu p}^a = + \partial_{\mu} V^a + V^p M^a_{a'} \partial_{\mu} (M^{a'}_a) + V^a M^a_{a'} \Pi'^a_{\mu p} M^{a'}_a \quad (25)$$

En este punto vamos hacer un cambio de notación usaremos la forma matricial para representar la ecuación 25.

### Nueva notación

$$M^{a'}_a = M$$

$$M^a_{a'} = M^{-1}$$

$$\Pi^a_{\mu p} = \Pi_{\mu}$$

$$\Pi'^a_{\mu p} = \Pi'_{\mu}$$

$$V^a = V^p$$

$$\partial_{\mu} V^a + V^p = \partial_{\mu} V^a + V^p M^{-1} \partial_{\mu} (M) + V^a M^{-1} \Pi'_{\mu} M \quad (26)$$

$$\Pi_{\mu} = M^{-1} \partial_{\mu} (M) + M^{-1} \Pi'_{\mu} M \quad (27)$$

Despejando  $\Pi'_{\mu}$  obtenemos lo siguiente

$$M^{-1} \Pi'_{\mu} M = \Pi_{\mu} - M^{-1} \partial_{\mu} (M)$$

$$\Pi'_{\mu} = \partial_{\mu} (M) M^{-1} - M \Pi_{\mu} M^{-1} \quad (28)$$

Observando la expresión de la ecuación 28 decimos que la conexión afín debe cambiar de esta forma para que la derivada covariante de un vector sea invariante.

### Transporte Paralelo

En matemáticas, un transporte paralelo en una variedad M con conexión especificada es un modo de transportar vectores sobre curvas diferenciables de manera que permanezcan "paralelos" respecto a la conexión dada. Un campo vectorial X sobre una curva diferenciable  $\gamma$  se llama paralelo si para cualquier t. (Ibañez, 2020).

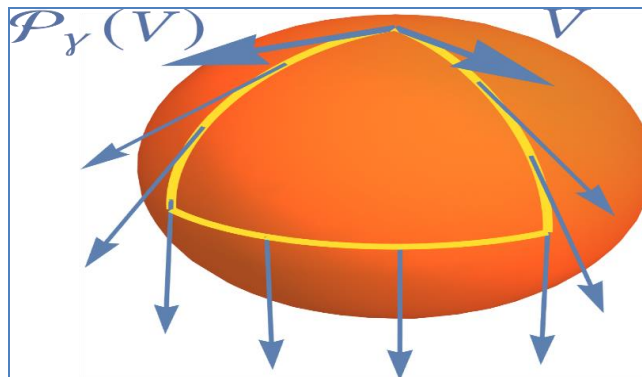


Figura 8. Transporte paralelo.

Sabemos que  $\partial_\beta(e_\sigma) = \Pi^\gamma_{\sigma\beta} e_\beta$

Sean  $M$  una variedad diferenciable con conexión  $\nabla$  y  $\gamma: \rightarrow M$  una curva suave.

$$R_{\mu\nu} = (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) e_a = \partial_\mu (\partial_\nu e_a) - \partial_\nu (\partial_\mu e_a) = \partial_\mu (\Pi_{\nu a}^b e_b) - \partial_\nu (\Pi_{\mu a}^b e_b)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu (\Pi_{\nu a}^b) e_b + \Pi_{\nu a}^b \partial_\mu (e_b) - \partial_\nu (\Pi_{\mu a}^b) e_b - \Pi_{\mu a}^b \partial_\nu (e_b)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu (\Pi_{\nu a}^b) e_b + \Pi_{\nu a}^b \Pi_{\nu b}^n e_n - \partial_\nu (\Pi_{\mu a}^b) e_b - \Pi_{\mu a}^b \Pi_{\nu b}^n e_n \quad (29)$$

Podemos renombrar la los índices repetidos de suma

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu (\Pi_{\nu a}^b) e_b + \Pi_{\nu a}^n \Pi_{\mu n}^b e_b - \partial_\nu (\Pi_{\mu a}^b) e_b - \Pi_{\mu a}^n \Pi_{\nu n}^b e_b \quad (30)$$

$$R^b_{\mu\nu a} = \{ \partial_\mu (\Pi_{\nu a}^b) + \Pi_{\nu a}^n \Pi_{\mu n}^b - \partial_\nu (\Pi_{\mu a}^b) - \Pi_{\mu a}^n \Pi_{\nu n}^b \} e_b \quad (31)$$

$$R^b_{\mu\nu a} = \{ \partial_\mu (\Pi_\nu) - \partial_\nu (\Pi_\mu) + \Pi_\nu^n \Pi_{\mu n} - \Pi_\mu^n \Pi_{\nu n} \}^b_a \quad (32)$$

Donde:

$\Pi_{\nu a}^n \Pi_{\mu n}^b$  - Es unas multiplicaciones de matrices, ya que la conexión deber ser una matriz para que la derivada covariante es un vector y se cumpla la invarianza (Souza, 2012)

Definimos el tensor de curvatura de Faraday como

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu (\Pi_\nu) - \partial_\nu (\Pi_\mu) + \Pi_\nu \Pi_\mu - \Pi_\mu \Pi_\nu \quad (33)$$

La forma como cambia el tensor de curvatura de Faraday bajo un cambio de coordenadas es la siguiente:  $R'_{\mu\nu} = M R_{\mu\nu} M^{-1}$  (34)

El tensor de curvatura de Faraday es una invariante es bajo transformación de coordenadas y la  $M$  es las matrices de transformación de base o de coordenadas

### Espacio-Tiempo de Minkowski

En física matemática, el espacio de Minkowski es una variedad lorentziana de cuatro dimensiones y curvatura nula, usada para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad de Einstein. En el espacio de Minkowski pueden distinguirse tres dimensiones espaciales ordinarias y una dimensión temporal adicional, de tal manera que todas juntas forman una 4-variedad y así representar al espacio-tiempo (Papuico Bernardo, 2012).

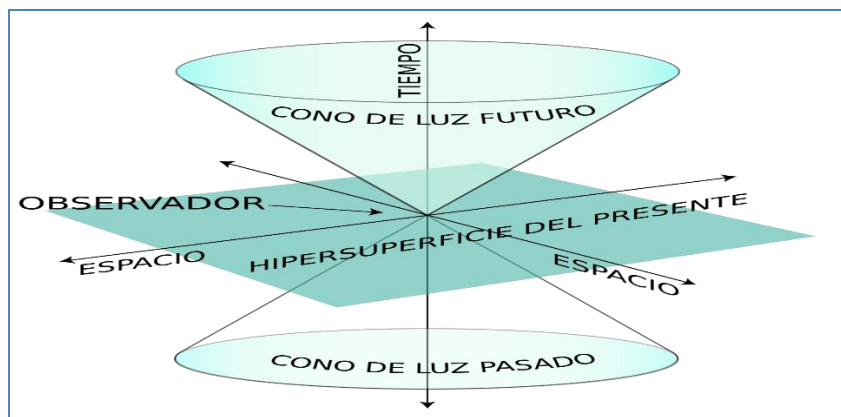


Figura 9. Espacio – tiempo de Minkowski.  
 Fuente: (Papuico Bernardo, 2012).

El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad Lorentziana de curvatura nula e isomorfa a  $\mathcal{M}_0 = (\mathbb{R}^4, \eta)$  donde el tensor métrico puede llegar a escribirse en un sistema de coordenadas cartesianas (Papuico Bernardo, 2012) como:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definimos el cuadvectores contravariante  $X^\mu = \{ ct, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \}$  y su forma covariante se conceptualiza, según (Papuico Bernardo, 2012) como:  $X_\mu = \eta X^\mu = \{ ct, -\mathbf{x}, -\mathbf{y}, -\mathbf{z} \}$

$$ds^2 = X^\mu \eta X^\mu = X^\mu X_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (35)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Aprovechando esta estructura de variedad Lorentziana del espacio – tiempo de Minkowski podemos formar un cuadvectores que llamaremos  $A^\mu = \{ \Phi, \vec{A} \}$  el cual existirá en el espacio cotangente a la variedad lorentziana por lo cual debemos colocar este cuadvectores como 1-Forma diferencial (Papuico Bernardo, 2012)

$$A = \Phi dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (36)$$

Ahora si calculamos la derivada exterior A obtenemos la el tensor de campo electromagnético  $F = dA$  (37)

Si desarrollamos la expresión anterior tenemos lo siguiente:

$$F = \left( \frac{\partial}{\partial x} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) dxdt + \left( \frac{\partial}{\partial y} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A_y \right) dt dy + \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A_z \right) dt dz + \left( \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) dx dy + \left( \frac{\partial}{\partial x} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_x \right) dz dx + \left( \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) dy dz \quad (38)$$

De donde podemos ver como emergen de manera natural la los campos eléctricos y magnéticos y recuperamos las ecuaciones 5 y 6 (Aceña, 2017).

- $E_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = E_1$
- $E_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} = E_2$
- $E_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} = E_3$
- $B_x = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_1$
- $B_y = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_2$
- $B_z = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_3$

$$\vec{E} = \nabla \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

La expresión 38 podemos ponerla en forma compactada de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad - \quad \text{Tensor de campo electromagnético}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Si usamos el tensor métrico para subir los índices tenemos la forma contravariante del tensor electromagnético (Aceña, 2017):

$$F^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} F_{\mu\nu} \eta^{\nu\beta} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{F}] &= [F^{\alpha\beta}] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ahora vamos deducir las 4 ecuaciones de Maxwell a partir de la definición de del tensor electromagnético, pero antes debemos definir el cuadrivector densidad de corriente como

$$J^\mu = \left\{ \frac{\rho}{\mu_0 \epsilon_0}, J_x, J_y, J_z \right\} \quad (41)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de carga y  $\vec{j} = \{ J_x, J_y, J_z \}$  es el vector tridimensional densidad de corriente .

Una vez ya definido este último ingrediente podemos reconstruir Maxwell a partir de la siguiente expresión:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \text{ donde } \mu \text{ y } \nu \text{ son índices que varían } \{0,1,2,3\}$$

Si queremos obtener la ley de Gauss del campo eléctrico solamente debemos fijar  $\nu=0$ , y el índice  $\mu$  esta contraído con tensor electromagnético y la derivada covariante aplicamos una suma por convenio de suma de Einstein, si hacemos eso obtenemos el siguiente resultado:

$$\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0 J^0 \quad (42)$$

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \mu_0 \frac{\rho}{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si ahora hacemos variar  $\nu = 1,2,3$  y hacemos los cálculos y simplificamos podemos obtener de la misma forma que la ecuación de Ampere Maxwell,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$



Nos quedan 2 leyes más de deducir, pero estas 2 ecuaciones la sacaremos a través del tensor dual de campo electromagnético el cual se define de la siguiente manera:

$$*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (43) \text{ Tensor dual del campo electromagnético}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y si ahora usamos la siguiente ecuación tenemos la ley de Gauss para magnetismo  $\partial_\alpha *F^{\alpha\beta} = 0$ , con el índice  $\beta = 0$ .

Obtenemos la siguiente expresión:

$$\partial_0 *F^{00} + \partial_1 *F^{10} + \partial_2 *F^{20} + \partial_3 *F^{30} = 0$$

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Y si al igual que en el caso anterior hacemos que el índice  $\beta = 1, 2, 3$  reemplazando, calculando y simplificando obtenemos como resultado la ecuación de Faraday (Romano, Salazar, Lozano, & Lugo, 2010).

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

### Transformación de Gauge

Sean los campos  $A_\mu$  con carga  $q_i$ , definimos el grupo de transformaciones sobre los campos por:  $A'_\mu =$

$e^{i\theta(x)} A_\mu$  (44), si ahora usamos las ecuaciones 28 y 33 nos podemos dar cuenta que la matriz M cambio de base es  $e^{i\theta(x)}$ , y la conexión  $\Pi'_\mu$ , la reemplazamos por el campo

$$A'_\mu, \text{ por lo sustituyendo tenemos lo siguiente } A'_\mu = \partial_\mu (e^{i\theta(x)}) e^{-i\theta(x)} - e^{i\theta(x)} A_\mu e^{-i\theta(x)}$$

$$A'_\mu = e^{-i\theta(x)} i e^{i\theta(x)} \partial_\mu (\theta(x)) - e^{i\theta(x)} e^{-i\theta(x)} A_\mu = i \partial_\mu \theta(x) - A_\mu$$

$$A'_\mu = i \partial_\mu \theta(x) - A_\mu \quad (45) \text{ Transformación de Gauge del potencial vectorial}$$

Este es el grupo de transformaciones unitarias en una dimensión U(1) con  $\theta$  independiente de  $x$ .

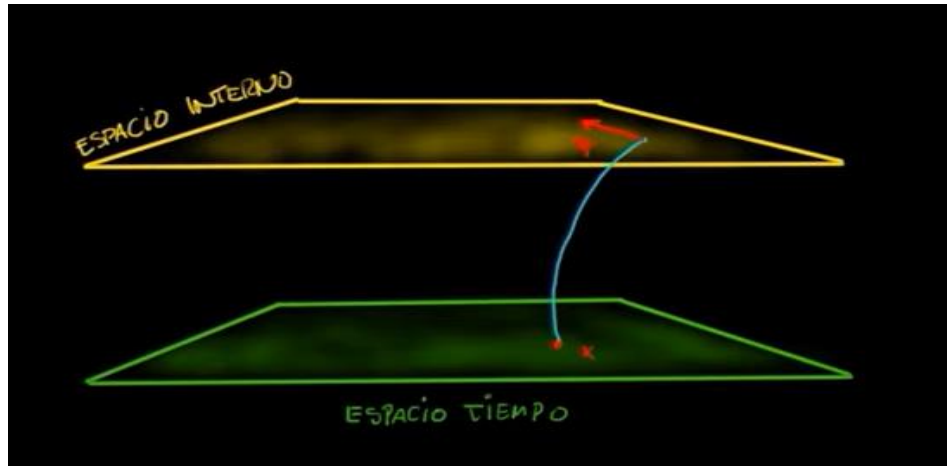


Figura 10. Espacio interno de una transformación de Gauge con simetría U (1).

Ahora si usamos las ecuaciones 33 que deducimos y hacemos el mismo de que hicimos en la ecuación 45 tenemos lo siguiente:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu(\Pi_\nu) - \partial_\nu(\Pi_\mu) + \Pi_\nu \Pi_\mu - \Pi_\mu \Pi_\nu \quad (\text{Tensor de curvatura de Faraday})$$

Si reemplazamos la conexión afin  $\Pi_\nu$  por el cuadrivector potencia vectorial  $A_\mu$  y simplificamos llegamos al siguiente resultado (Pitter, 2010).

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu) - \partial_\nu(A_\mu) + A_\nu A_\mu - A_\mu A_\nu = \partial_\mu(A_\nu) - \partial_\nu(A_\mu)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu) - \partial_\nu(A_\mu) \quad (46)$$

Podemos dar cuenta que el tensor de curvatura de Faraday  $r_{\mu\nu}$ , toma la misma forma que tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$

$$r_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu(A_\nu) - \partial_\nu(A_\mu) \quad (47)$$

Una vez ya sabiendo todo esto podemos crear el Lagrangiano de nuestra nueva teoría en función del tensor de campo electromagnético:

$$L = -1/4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - 1/CA_\mu J_\mu \quad (48)$$

Si se usan la ecuación de Euler Lagrange podemos llegar a las 4 ecuaciones Maxwell por lo cual esta es la forma más general y compacta que tiene la teoría electromagnética (Romano, Salazar, Lozano, & Lugo, 2010).

## Conclusiones

La primera conclusión a la que llegamos tras saber que el tensor de curvatura de Faraday  $F_{\mu\nu}$  es igual a tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$  cuando existe una conexión afín con simetría local  $U(1)$ , es que podemos asociar un espacio interno al cuadrivector carga eléctrica que por lo general tiene una dimensión diferente a la del espacio tiempo, sin en dicho espacio interno el cual consta de una variedad diferencial hay curvatura entonces de manera espontánea se generan un campo  $E^{\vec{}}$ , y  $B^{\vec{}}$  a los cuales denominamos campos eléctrico y magnético, resumiendo podemos decir que los campos electromagnéticos son una consecuencia de que hay una curvatura en variedad diferencial interna al cuadrivector densidad carga cabe recalcar que la carga vive en el espacio tiempo 4 dimensional de la teoría Minkowski, pero la carga tiene asociado un espacio interno con una conexión afín dado por  $A_{\mu}$ , cuando en ese espacio interno hay curvatura entonces se reflejan un campo eléctrico y magnético en el espacio de tiempo de Minkowski o el espacio real donde viven todos los objetos físicos y por esa la razón que podemos medir el campo eléctrico y magnético, pero el cuadrivector potencial electromagnético no podemos medir, porque su naturaleza esta descrita por un espacio interno no físico y solo cuando en ese espacio interno hay curvatura se manifiesta en nuestro mundo físico un campo eléctrico  $E^{\vec{}}$ , y magnético  $B^{\vec{}}$ .

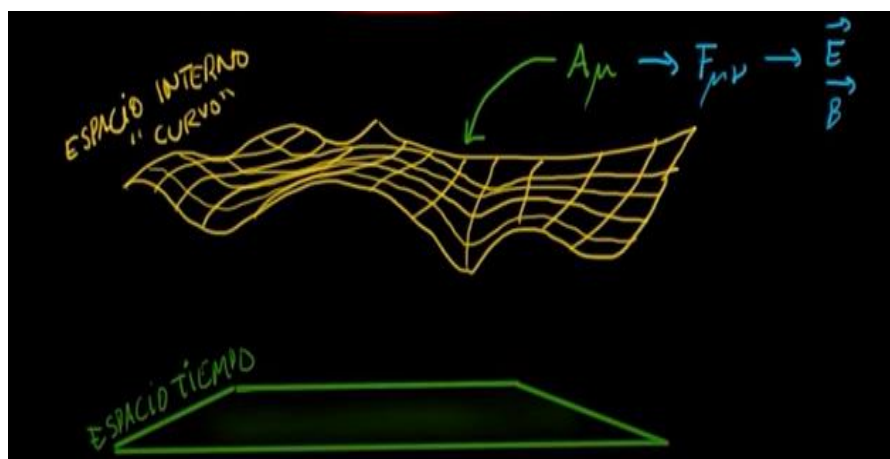


Figura 11. Interpretación de los campos electromagnéticos.

## Referencias Bibliográficas

- Aceña, A. (2017). La transición a la formulación covariante de electromagnetismo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 39, nº 1, e1304. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0072>. <https://www.scielo.br/j/rbef/a/pWFLbBvh7g3bB4fmqthn8K/?lang=es&format=pdf>, pp.304-307.
- Acevedo, A., Cuzinato, R., Pimentel, B., & Pompeia, P. (2018). Gauge theories a la Utiyama. *Rev. Bras. Ensino Fís.* 40 (4). <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0007>. <https://www.scielo.br/j/rbef/a/GPN84xC7MQ7JwsxzS5H8Qn/abstract/?lang=en>, pp.4-6.
- Alvarado Silos, D. (2020). Ecuaciones de Maxwell. *Autonomous University of Nuevo León*. DOI:10.13140/RG.2.2.24946.32961. [https://www.researchgate.net/publication/342153868\\_Ecuaciones\\_de\\_Maxwell](https://www.researchgate.net/publication/342153868_Ecuaciones_de_Maxwell).

- Balart, L. (s/f). Teorías de Gauge. *Universidad Católica de Chile. Facultad de Física*.  
<http://www.fis.puc.cl/~jalvaro/tesis/balartlic.pdf>, pp.1-32.
- Cordero, P. (2017). Electromagnetismo. *Editorial Universitaria. Universidad de Chile. Departamento de Física. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas*. [https://www.cec.uchile.cl/cinetica/pcordero/todos/EM\\_E.pdf](https://www.cec.uchile.cl/cinetica/pcordero/todos/EM_E.pdf), pp.209.
- De la Torre Domínguez, P. (2022). El uso de fibrados diferenciables en las Teorías de Gauge. *Universidad de Granada. España. Facultad de Ciencias. Sección de Físicas*. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/76397>.
- Ferrando, M., & Valero, A. (s/f). Fundamentos de Radiación. *Antenas. Universidad Politécnica de Valencia. España*.  
[http://www.upv.es/antenas/Documentos\\_PDF/Notas\\_clase/Fundamentos\\_radiacion.pdf](http://www.upv.es/antenas/Documentos_PDF/Notas_clase/Fundamentos_radiacion.pdf), pp.1-18.
- Frampton, P. (2008). *Gauge Field Theories*. Weinheim, Alemania : Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. 3ra Edición.
- Grimasky, V. (2018). *Electromagnetismo Básico*. México.
- Huamani, R., & Villegas, F. (2011). Simetrías gauge local aplicadas a la física. *Revista de Investigación de Física 14, 111401756. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima, Perú*.  
[https://sisbib.unmsm.edu.pe/Bibvirtual/publicaciones/fisica/v14\\_n1/pdf/a06.pdf](https://sisbib.unmsm.edu.pe/Bibvirtual/publicaciones/fisica/v14_n1/pdf/a06.pdf), pp.1-9.
- Ibañez, C. (2020). *Formulacion matematica de las teoria de Guage , grupos de Lie y teoria de representaciones ,acciones de grupos fibrados , conexion ,curvatura y derivada covariante aplicados a la fisica*. Madrid: Universidad de Valencia.
- Papuico Bernardo, V. (2012). Sobre el álgebra geométrica del espacio-tiempo de Minkowski. *Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima – Perú. Trabajo de Titulación*. <https://core.ac.uk/download/pdf/323345195.pdf>, pp.81.
- Pitter, W. (2010). Espacios Fibrados y Conexiones en Relatividad. *Universidad del Zulia, Venezuela. Facultad de Ciencias. Departamento de Física*. DOI:10.13140/RG.2.1.2654.4727.  
[https://www.researchgate.net/publication/288838494\\_ESPACIOS\\_FIBRADOS\\_Y\\_CONEXIONES\\_EN\\_RELATIVIDAD](https://www.researchgate.net/publication/288838494_ESPACIOS_FIBRADOS_Y_CONEXIONES_EN_RELATIVIDAD).
- Rivas Guijarro, X. (2014). Formulación Geométrica de las Teorías Gauge y de Yang-Mills. *Universitat Politècnica de Catalunya. Trabajo de Fin de Grado. Barcelona. España*.  
<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/22925/memoria.pdf>, pp.52.
- Rodríguez, V., & Lamberti, P. (2013). La Prehistoria del Gauge. *Epistemología e Historia de la Ciencia. Volumen 19*.  
[https://rdu.unc.edu.ar/bitstream/handle/11086/19867/lamberti\\_rodriguez\\_jornadas\\_2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://rdu.unc.edu.ar/bitstream/handle/11086/19867/lamberti_rodriguez_jornadas_2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y), pp.368-375.
- Romano, P., Salazar, M., Lozano, C., & Lugo, R. (2010). Metodología para la Cuantización de Campos de Yang-Mills. *Información Tecnológica 22 (5): DOI:10.4067/S0718-07642011000500012*.  
[https://www.researchgate.net/publication/262701222\\_Metodologia\\_para\\_la\\_Cuantizacion\\_de\\_Campos\\_de\\_Yang-Mills](https://www.researchgate.net/publication/262701222_Metodologia_para_la_Cuantizacion_de_Campos_de_Yang-Mills), pp. 91-106.
- Souza, J. (2012). Uma Nota Sobre a Teoria Dos Grupos: Da Teoria de Galois à Teoria de Gauge. *RBHM: Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 12. Nro. 24. Doi: 10.47976/RBHM2012v12n2471-81*.  
<https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/108>, pp.50-56.
- Vílchez, N. (1996). Aspectos Geométricos de la Teoría de Yang-Mills. *Universidad de los Andes. Mérida. Venezuela. Trabajo de Grado de Maestría*. [http://bdigital.ula.ve/storage/pdftesis/postgrado/tde\\_arquivos/104/TDE-2012-06-18T04:29:47Z-2332/Publico/vilcheznieves.pdf](http://bdigital.ula.ve/storage/pdftesis/postgrado/tde_arquivos/104/TDE-2012-06-18T04:29:47Z-2332/Publico/vilcheznieves.pdf), pp.128.
- Yauli Huilca, A., & Rosas Meneses, V. (2020). Estabilidad Estructural de Campos de vectores en Variedades con Borde. *Universidad Nacional de San Agustín. Arequipa-Perú. Trabajo de Titulación. /Asesor: Rosas Meneses*.  
<http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12773/14065/MAYahuaj.pdf?sequence=1&isAllowed=y>, pp.39.